VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

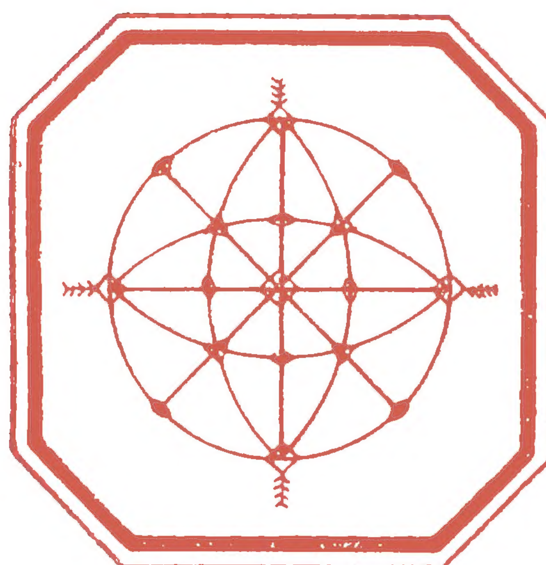
∾ КЛАССИКИ НАУКИ ∾



А. В. ГАДОЛИН

ВЫВОД ВСЕХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ ИЗ ОДНОГО ОБЩЕГО НАЧАЛА

РЕДАКЦИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ
О. М. АНШЕЛЕСА, И. И. ШАФРАНОВСКОГО,
В. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКОГО



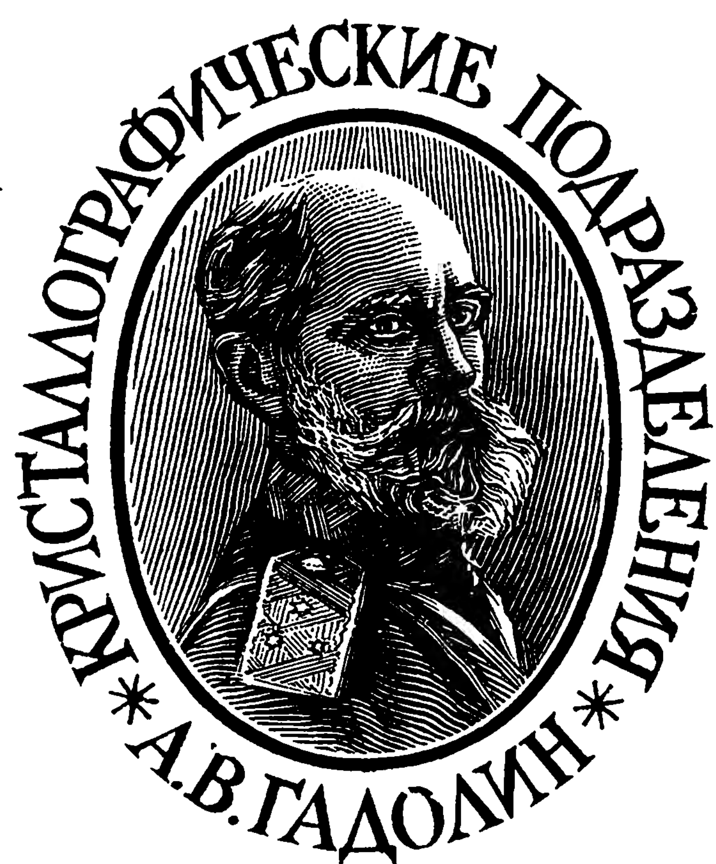
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1954

СЕРИЯ „КЛАССИКИ НАУКИ“

Основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *Н. Н. Андреев*, академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*, академик *А. И. Опарин*, академик *О. Ю. Шмидт*, академик *Д. И. Щербаков*, академик *П. Ф. Юдин*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. А. Максимов*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, доктор географических наук *Д. М. Лебедев*, доктор химических наук *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов*, кандидат исторических наук *Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь).

*


КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ
А.В. ГАДОЛИН

ВЫВОД
ВСЕХ
КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ПОДРАЗДЕЛЕНИЙ ИЗ ОДНОГО ОБЩЕГО НАЧАЛА





ВВЕДЕНИЕ [1]

Исследование природных кристаллов показало, что кроме некоторых общих законов, обнимающих все известные формы (плоский вид граней, постоянство углов[2] и рациональность отношения параметров по каждой данной оси[3]), существуют еще относительно расположения граней некоторые частные законы, из которых каждый обнимает только известную группу кристаллов. Мы здесь имеем в виду так называемые кристаллические системы и подразделения их на группы голоэдрические, гемиэдрические, тетартоэдрические и гемиморфные [4]. Группы эти были созидаемы кристаллографами по мере надобности таким образом, чтобы возможно было каждый кристаллический ряд, подвергнувшийся исследованию, отнести к одной из этих групп. Некоторые ученые шли даже далее и, основываясь на известных аналогиях, предсказывали существование новых групп, еще не открытых, и эти предсказания в некоторых случаях оказались удачными. Возможность подобных предсказаний, а также и очевидные аналогии, существующие не только между голоэдрическими, гемиэдрическими и тетартоэдрическими формами данной системы, но и между различными системами, возбудили в нас мысль отыскать одно общее начало, из которого можно было бы не только вывести как последствие все уже образовавшиеся в кристаллографии группы, но и предсказать все группы, которые еще, может быть, придется образовать по мере новых открытий науки. Изложение этого начала и его последствий составляет предмет настоящей статьи.

Давно известна связь, существующая между формой кристаллов и физическими их свойствами. Главный характер этой связи заключается в том, что если два направления одинаково расположены относительно граней наружной формы, то по этим двум направлениям и физические свойства одинаковы [5]. И до настоящего времени при классификации кристаллических рядов физические свойства кристаллов играли немаловажную роль; не мало известно примеров, в которых окончательное причисление кристаллов какого-нибудь тела к той или другой системе сделано на основании физических их свойств. По многим, однако, причинам было бы весьма неосновательно положить одни только физические свойства, в том смысле, как обыкновенно понимают это слово, в основание при классификации кристаллов. Но если принять во внимание, что особенности в наружной форме кристаллов зависят от особенностей в действии частичных сил, то мы можем и эти особенности причислить к физическим свойствам.

Это соображение объясняет нам упомянутую выше связь между наружною формою и физическими свойствами, которые вообще все зависят от проявления частичных сил. Вследствие этого особенную важность принимает рассматривание направлений, одинаково расположенных относительно кристаллических граней; для краткости выражения, такие направления будем называть *равными* [6]. Наша классификация кристаллов на этом основана, так что мы относим в одну и ту же группу все те кристаллы, в которых число и расположение равных направлений одинаково. Мы ниже докажем, что при допущении закона рационального отношения между параметрами таких групп можно составить только ограниченное число. Большинство из числа групп, образованных этим чисто теоретическим путем, тождественны с теми группами, которые уже в настоящее время образовались в науке, и нет ни одной такой группы, существование которой в природе можно было бы считать неоспоримым и которая не совпала бы с одною из вышеупомянутых теоретических групп. За этим

остаются из этих теоретических групп еще некоторые, к которым еще не найдены в природе соответствующие формы. Это может происходить от двоякой причины: или эти формы невозможны в природе, или же они существуют, хотя они еще и не были найдены. Если некоторые из этих форм действительно невозможны, то причиной такого отсутствия должно быть какое-нибудь начало, которое еще остается отыскать. Пока такое начало не найдено, то эти недостающие группы остаются предсказанными. Предсказания подобные делал и Науман, руководствуясь при этом частными аналогиями, основанными на морфологическом характере кристаллографических групп, уже установленных. От подобных предсказаний невозможно было ожидать, чтобы они были полны: в любой день могла бы быть открыта новая группа, не предсказанная Науманом, и от такого события вероятность других его предсказаний нисколько не пострадала бы. Если же эти предсказания будут сделаны на основании одного общего начала, подобного тому, которое мы имеем в виду установить, и если начало это справедливо, то с помощью его можно предсказать все группы, существование которых возможно, так что с открытием новой группы, которая не может быть выведена из этого общего начала, вместе с тем и самое это начало должно упасть. Некоторые из наших групп согласны с группами, предсказанными Науманом; другие из групп, предсказанных Науманом и еще не найденных в природе, не проистекают из нашего общего начала, и, наконец, некоторые из предсказанных нами групп не приведены у Наумана.

Глава I

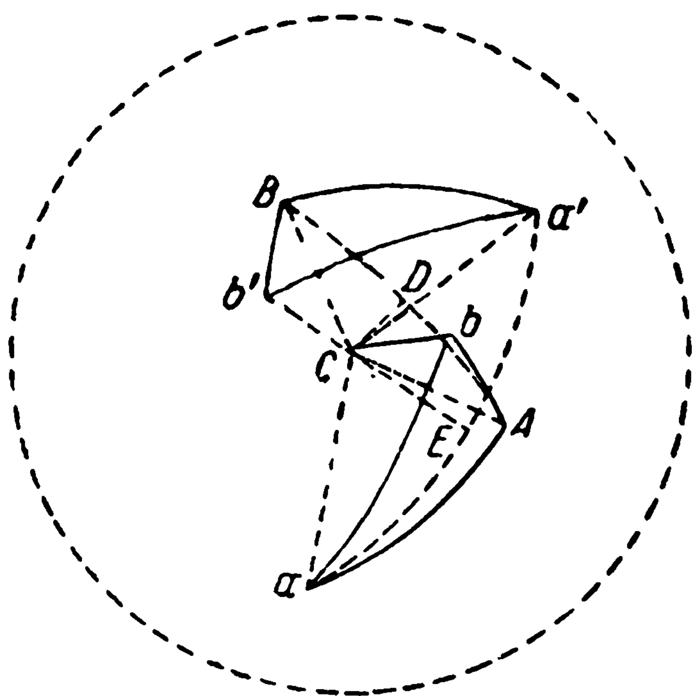
О РАВЕНСТВЕ НАПРАВЛЕНИЙ

§ 1. Мы называем *равными направлениями* в кристалле два направления A и B (фиг. 1),[1] имеющие то свойство, что к двум каким-нибудь граням кристалла a и b можно отыскать

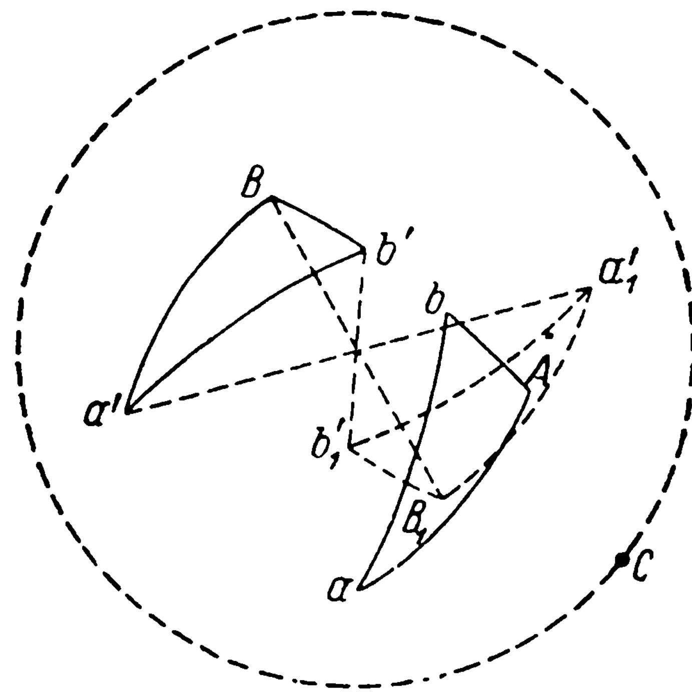
[1] См. объяснение чертежей.

две *грани, соответствующие* a' и b' такие, чтобы они как между собою, так и с направлением B образовали углы, одинаковые с теми, которые образуют грани a и b между собою и с направлением A. (В частном случае одна из граней a и b может сливаться или с соответствующей ей гранью из a' и b', или с другой из этих граней). Итак, для равенства направлений A и B должны быть равны следующие дуги:

$$Aa = Ba', \quad Ab = Bb', \quad ab = a'b'.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Равенство двух направлений может быть двух родов: *равенство совмещения* и *равенство симметричное*. Равенство совмещения (фиг. 1) имеет место, если грани a и b относительно направления A расположены в одну и ту же сторону, как соответствующие им грани a' и b' относительно направления B;[1] симметричным же равенством мы называем

[1] Чтобы точнее объяснить, что мы здесь разумеем под выражениями „расположены в одну“ или „в противоположную сторону относительно двух данных направлений“, представим себя стоящими вдоль по направлению A так, чтобы ноги находились в центре шара, голова в точке A на поверхности шара, а лицо обращено к точке a. Если при этом точка b будет, предположим, на правой стороне и если затем стать таким же образом по направлению B лицом к точке a', и при этом точка b' окажется также на правой стороне, то говорится, что грани a и b располо-

такое, при котором грани a' и b' относительно направления B расположены в противоположную сторону, нежели грани a и b относительно направления A (фиг. 2).

Ниже мы рассмотрим различные случаи распределения равных направлений того или другого рода, которые могут иметь место при существовании закона рационального отношения между параметрами.

Глава II

ОБ ОСЯХ СОВМЕЩЕНИЯ

§ 2. Если между двумя направлениями в кристалле существует равенство совмещения, то я говорю, что кристалл можно повернуть около некоторой оси на некоторый угол так, чтобы каждая грань кристалла в новом положении совместилась с соответствующей ей гранью, оставленной в прежнем положении. (Мы говорим, что две грани совмещаются, если они сделались параллельными и если при этом перпендикуляры, к ним проведенные во внутрь тела кристалла, направлены в одну и ту же сторону). Проведем через середины дуг AB и aa' (фиг. 1)[7] большие круги DC и EC, перпендикулярные к этим дугам. Если повернем кристалл около прямой C пересечения плоскостей этих кругов на угол ACB так, чтобы точка A совместилась с точкой B, то все грани кристалла в новом положении совместятся с соответствующими гранями, оставленными в прежнем их положении. В самом деле, так как по построению $AC=CB$, $aC=a'C$ и вследствие равенства направлений A и B, $Aa=Ba'$, то треугольники aAC и $a'BC$ равны, так что углы aCA и $a'CB$ равны.

жены в одну и ту же сторону относительно направления A, как и грани a' и b' относительно B. Если же стать в A и B, как объяснено, и в одном положении грань b будет на правой стороне, а в другом положении b' — на левой стороне, тогда говорим, что грани a' и b' относительно направления B расположены в сторону, противоположную против расположения соответствующих им граней относительно направления A.

Вследствие этого и угол $aCa' = ACB$, так что при повороте около оси C на угол ACB, когда A совместится с B, то и a совместится с a'. Докажем теперь, что в то же время и b совместится с b'. Из равных треугольников aAC а $a'BC$ мы имеем, что углы CaA и $Ca'B$ равны; отнимая от них равные углы baA и $b'a'B$, мы получим равные углы baC и $b'a'C$. Но в треугольниках baC и $b'a'C$ и стороны, прилежащие к этим углам, равны, а потому и треугольники эти равны. Из этого следует равенство как сторон bC и $b'C$, так и углов aCb и $a'Cb'$, после чего уже ясно видно, что при повороте около прямой C на угол $ACB = bCb'$, когда прямая A совпадет с прямою B, то и b совпадет с b'. Но так как b есть перпендикуляр к какой угодно грани кристалла, то очевидно, что при повороте около прямой C на угол ACB так, чтобы A совместилось с B, каждая грань кристалла совмещается с соответствующей ей гранью.

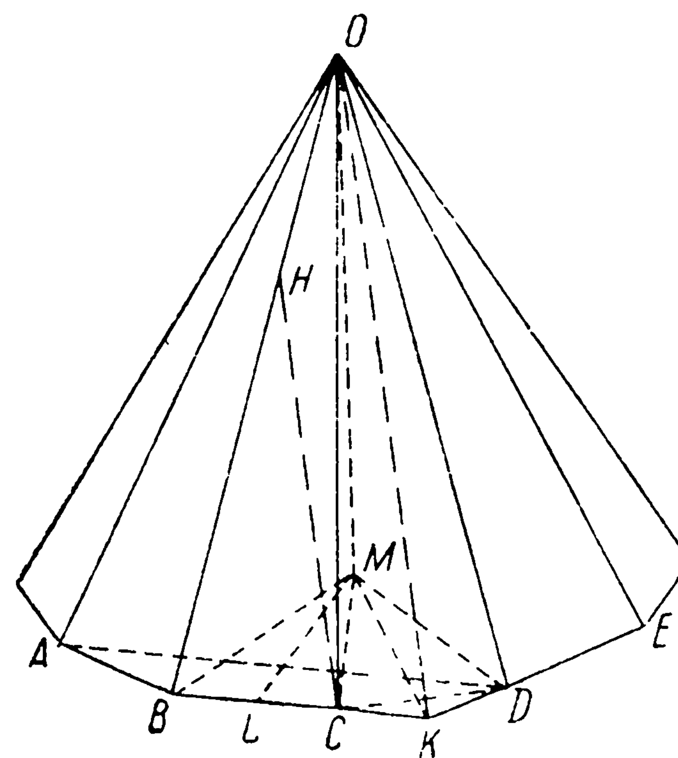
Мы назовем *осью совмещения* прямую, около которой надобно повернуть кристалл на данный угол, называемый *углом совмещения*, для того чтобы каждая грань в новом положении совместилась с соответствующей ей гранью, оставленной в прежнем положении.

Очевидно, что если совмещение производится при повороте около данной оси на угол α, то произойдет также совмещение граней с другими группами граней, им соответствующих, при повороте около той же оси на угол 2α, 3α или вообще на угол $n\alpha$, где n — целое число. В самом деле, при повороте на угол α группа граней a, b повернутого кристалла слилась с группой a', b' не повернутого (фиг. 1); в это же время группа a', b' повернутого слилась с какими-нибудь гранями a'', b'' не повернутого кристалла, и с этими-то гранями сольются a и b повернутого кристалла, когда угол поворота будет 2α, и т. д. Также очевидно, что если совмещение происходит при повороте в одну сторону на угол α, то оно произойдет также при повороте в противоположную сторону, на тот же угол.

Из вышесказанного видно, что нужно обратить особое внимание на ***наименьший угол*** [8], на который следует повернуть кристалл около данной оси для того, чтобы произвести совмещение граней. Этот-то наименьший угол мы преимущественно и будем называть углом совмещения и по нем будем называть самую ось совмещения; так, например, названиями ось в 60° или 90° мы будем обозначать такие оси, при которых наименьший угол совмещения составляет 60° или 90° [9].

Нетрудно также видеть, что равенство совмещения двух направлений в кристалле влечет за собой равенство всех тех направлений, которые сливаются при повороте около оси совмещения на угол совмещения.

Приступая к исследованию свойств осей совмещения, мы сначала должны доказать следующую теорему:



Фиг. 3.

§ 3. *Несколько возможных кристаллографических осей, направленных вдоль по ребрам правильной пирамиды, могут существовать только тогда, если косинус центрального угла основания этой пирамиды есть рациональная величина.*

Пусть (фиг. 3) OA, OB, OC, OD, OE представляют несколько смежных ребер правильной пирамиды. Вообразим плоскость $ABCDE$, проведенную через любую точку C, взятую на одном из ребер OC, перпендикулярно к оси OM пирамиды, т. е. к прямой, образующей равные углы со всеми ребрами пирамиды. Эта плоскость, пересечением своим с гранями пирамиды, образует правильный многоугольник $ABCDE$, центр которого есть M, основание перпендикуляра OM. Если все ребра пирамиды суть возможные кристаллографические

оси,[1] то всякая плоскость, проходящая через два каких-нибудь ребра пирамиды, а следовательно и плоскость AOD, есть возможная кристаллическая плоскость. Так как эта плоскость проходит через прямую AD, параллельную прямой BC, заключающейся в плоскости BOC, то пересечение этих плоскостей между собою параллельно этим прямым, так что если через точку C провести плоскость, параллельную AOD, то пересечение ее с плоскостью BOC будет по прямой BC. Проведем еще через точку C плоскость, параллельную плоскости DOE, которая также есть кристаллографически возможная плоскость. Чтобы построить пересечение этой плоскости с плоскостью BOC, то, продолжая стороны основания BC и DE до пересечения в точке K, заметим, что прямая OK есть пересечение плоскостей BOC и DOE и что плоскость, проведенная через C параллельно DOE, должна с плоскостью BOC пересекаться по прямой CH, параллельной OK. Мы найдем параметр OH этой плоскости по оси OB из треугольника OBK, рассеченного параллельно основанию. Мы имеем

$$\frac{OB}{OH}=\frac{BK}{CK}.$$

Если центральный угол многоугольника BMC назовем α и радиус описанного круга $BM=r$, то имеем

$$\frac{1}{2}BC=r\sin\frac{1}{2}\alpha,\quad \frac{1}{2}BC+CK=r\cos\frac{1}{2}\alpha\operatorname{tg}\alpha,$$

и, следовательно,

$$BK=r\sin\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}+1\right)=r\sin\frac{1}{2}\alpha\frac{[1+2\cos\alpha]}{\cos\alpha}$$

и

$$CK=BK-BC=\frac{r\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha},$$

---

[1] См. Приложение А.

откуда

$$\frac{OB}{OH} = 1 + 2\cos\alpha.$$

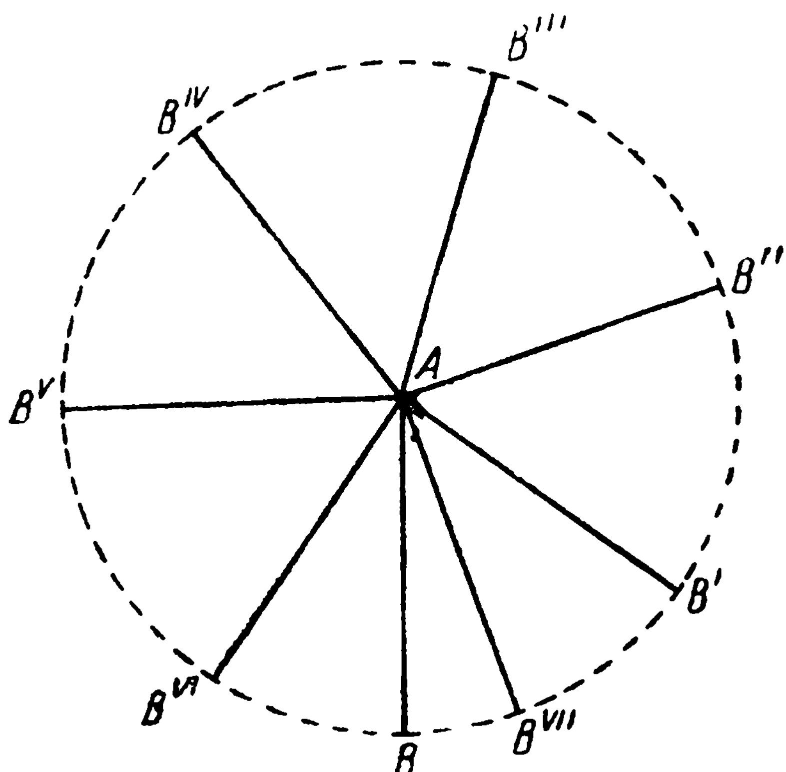
Это есть отношение между параметрами двух возможных кристаллических плоскостей по одной и той же оси; оно может быть рационально только в таком случае, если $\cos\alpha$ рационально. Приведенное выше доказательство не применяется, если в пирамиде нашей меньше пяти ребер; этот случай имеет место, если $\alpha = 90°$ или $\alpha = 120°$. Но так как $\cos 120°$ и $\cos 90°$ оба рациональны, то мы все-таки имеем право заключить, что невозможны все системы осей, направленных по ребрам правильной пирамиды, при которой центральный угол основания не имеет рационального косинуса.

§ 4. На основании предыдущих параграфов легко доказать, что при существовании оси совмещения *угол совмещения может иметь только некоторые определенные значения, а именно 60°, 90°, 120° и 180°* [10].

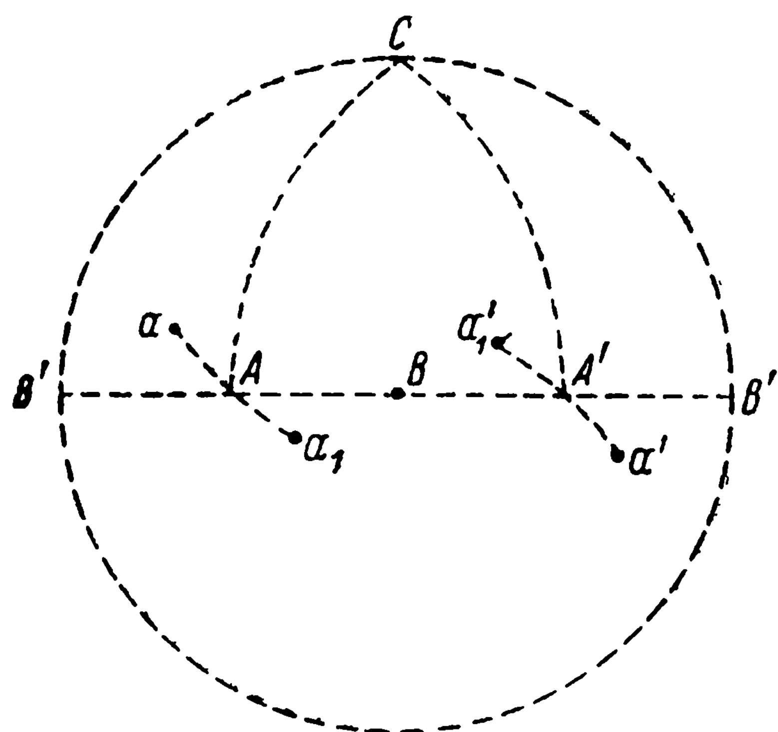
Для этого докажем сначала, что угол совмещения непременно составляет целую часть от 360°. Пусть α будет наименьший угол совмещения около оси A (фиг. 4), которую мы себе воображаем перпендикулярною к плоскости бумаги. Пусть AB будет какая-нибудь прямая, перпендикулярная к оси A, которая вращается вместе с кристаллическими плоскостями около оси A. Пусть B^{I}, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, B^{V}, B^{VI}, B^{VII} будут последовательные положения, которые принимает эта прямая при последовательных поворотах кристалла на угол α. Если α не есть целая часть от 360°, то мы всегда можем найти такое целое число n, что $(n-1)\,\alpha < 360°$ и $n\alpha > 360°$. Если тогда повернуть кристалл вместе с прямою AB n раз около оси A на угол α, то от этого прямая AB займет некоторое положение, например B^{VII}, между первыми двумя положениями ее B и B^{I}, и в таком случае, чтобы совместить систему кристаллических плоскостей с одним из прежних ее положений, надобно повернуть кристалл на угол $B^{\mathrm{VII}}AB^{\mathrm{I}}$, меньший чем α. Но это противоречит нашему зада-

нию, что α есть наименьший угол совмещения около оси A. Из этого мы заключаем, что наименьший угол совмещения, соответствующий данной оси, есть целая часть от 360°.

Так как, с другой стороны, какая-нибудь грань, пересекающаяся с осью совмещения под углом не прямым, при последовательных поворотах на угол α около оси совмещения совмещается с гранями правильной пирамиды, центральный угол основания которой есть α и ребра которой как пересе-



Фиг. 4.



Фиг. 5.

чения двух кристаллических плоскостей суть кристаллографические оси, то из этого следует, согласно § 3, что $\cos\alpha$ есть рациональная величина. В приложении В доказано, что целые части от 360° могут иметь рациональные косинусы только тогда, если эти косинусы имеют одно из значений 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1, из чего видно, что угол α, наименьший угол совмещения около данной оси совмещения, может иметь только следующие величины: 60°, 90°, 120° и 180°.

§ 5. Приступая к определению относительного положения осей совмещения, когда их существует несколько в одном и том же кристаллическом ряду, покажем сначала, что углы между осями совмещения могут иметь только некоторые опре-

деленные значения. При этом мы рассмотрим по порядку углы между осями совмещения в 180°, 90°, 60°, различные случаи совокупления их между собою и с осями в 120° и, наконец, совокупления между собою одних осей в 120°.

§ 6. Покажем сначала, что *существование двух осей в 180°, 90° или 60°, одноименных или разноименных, наклоненных друг к другу под углом α, влечет за собою существование оси совмещения в 2α, им перпендикулярной.*

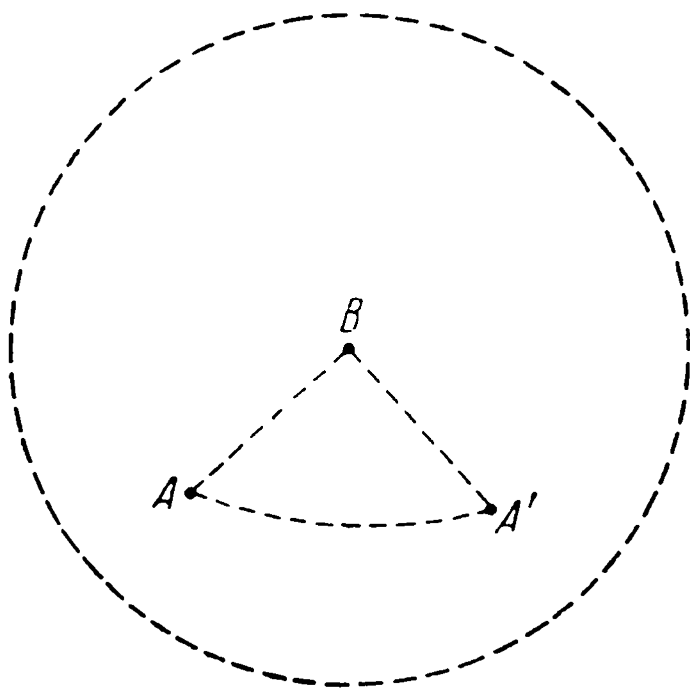
Пусть A и B (фиг. 5) будут оси в 180° и дуга $AB = \alpha$. Пусть a будет перпендикуляр к какой-нибудь грани кристалла; положение этой грани определяется углом $aAB' = \beta$ и дугою $Aa = b$. При повороте на 180° около A грань a должна совместиться с другой гранью a_1, причем $BAa_1 = \beta$ и $Aa_1 = b$. При повороте около B на 180° ось A совместится с прямой A', точки a и a_1 — с точками a' и a'_1, которые вследствие этого будут обозначать перпендикуляры к существующим граням. При этом углы $BA'a'_1 = B''A'a' = \beta$ и дуги $A'a' = A'a'_1 = b$. Если C есть точка, отстоящая от круга AB на 90°, то $CA = CA' = 90°$ и угол $ACA' = 2\alpha$. Если кристалл повернем около прямой C на угол 2α, то точка A совпадет с точкой A', a — с a'_1 и a_1 — с a'. Из этого видно, что какая бы ни была на кристалле грань a, то непременно найдется другая, с которой она совмещается при повороте кристалла около прямой C на угол 2α; следовательно, прямая C есть ось совмещения в 2α.

Так как 2α есть угол совмещения, то из величин, не превосходящих 180°, он может иметь только следующие значения: 60°, 90°, 120° и 180°. Из этого следует, что *углы, не превосходящие 90° между осями совмещения в 180°, могут иметь только следующие значения: 30°, 45°, 60° и 90°.*

Так как при осях совмещения в 60° и 90° совмещение происходит также при повороте на 180°, то все сказанное в этом параграфе об осях в 180° применяется и к осям совмещения в 60° и 90°.

§ 7. Если рассуждения предыдущего параграфа сделать в обратном порядке, то легко видеть, что справедливо и обратное предложение, т. е., что *если существует ось совмещения A в $180°$, $90°$ или $60°$ и другая ось совмещения C в 2α, перпендикулярная к первой, то кроме осей совмещения первого рода, отстоящих друг от друга на угловое расстояние 2α, будут существовать еще оси в $180°$, разделяющие пополам углы между ними.*

§ 8. *Ось в $90°$ с другой осью в $180°$, $90°$ или $60°$ может образовать только два различных угла: $45°$ или $90°$.* Положим, что B (фиг. 6) есть ось в $90°$ и A — другая ось в $180°$, $90°$ или $60°$. Если угол $ABA' = 90°$ и дуга $BA' = BA$, то A' есть также ось совмещения одного названия с A. Мы имеем



Фиг. 6.

$$\cos AA' = \cos^2 AB.$$

Дуги AA' и AB могут, согласно § 6, принимать только значения $30°$, $45°$, $60°$ и $90°$ и дополнения этих углов до двух прямых; вследствие этого косинусы этих углов могут принимать только значения $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{2}$ и 0. Нетрудно видеть, что при приведенной выше зависимости между двумя косинусами существуют только две системы величин, удовлетворяющих этой зависимости, а именно:

$$\cos AA' = +\frac{1}{2}, \quad \cos AB = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

и

$$\cos AA' = 0, \quad \cos AB = 0,$$

так что угол AB может принимать только значения: $45°$, $135°$ и $90°$. Из этих трех случаев, однако, первый и второй совпадают, потому что углы $45°$ и $135°$ суть дополнительные до $180°$.

§ 9. ***При оси в 60° другая ось в 60°, 90° или 180° может с ней образовать только угол прямой.***

Если B (фиг. 6) есть ось в 60° и A — другая ось в 60°, 90° или 180° и если угол $ABA' = 60°$ и дуга $BA' = BA$, то A' будет ось совмещения, однородная с A. Мы имеем

$$\cos AA' = \cos^2 AB + \frac{1}{2}\sin^2 AB = \frac{1}{2}(\cos^2 AB + 1),$$

откуда

$$\cos^2 AB = 2\cos AA' - 1.$$

Согласно § 6, $\cos AB$ и $\cos AA'$ могут иметь только следующие значения: $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\pm\frac{1}{2}$ и 0. Нетрудно видеть, что из этих значений одна только система удовлетворяет вышеприведенной зависимости, а именно:

$$\cos AA' = \frac{1}{2}, \quad \cos AB = 0,$$

т. е. что к оси B в 60° другая A в 60°, 90° или 180° может быть наклонена только под углом в 90°.

§ 10. Из предыдущих параграфов нетрудно вывести заключение о всех возможных совокуплениях между собой осей совмещения в 60°, 90° и 180°.

1) *Совокупления, в которые входит ось в 60°.*

Согласно § 9, прочие оси должны быть ей перпендикулярны, но так как при этом одноименные оси будут образовывать между собою углы в 60°, то эти оси не могут быть ни в 60° (§ 9), ни в 90° (§ 8). *Остается, значит, единственное совокупление оси в 60° с осями в 180°. Последние заключаются все в плоскости, перпендикулярной к первой, и их всего будет шесть (§ 7), причем углы между двумя смежными из них 30°.* (См. фиг. 44).[1]

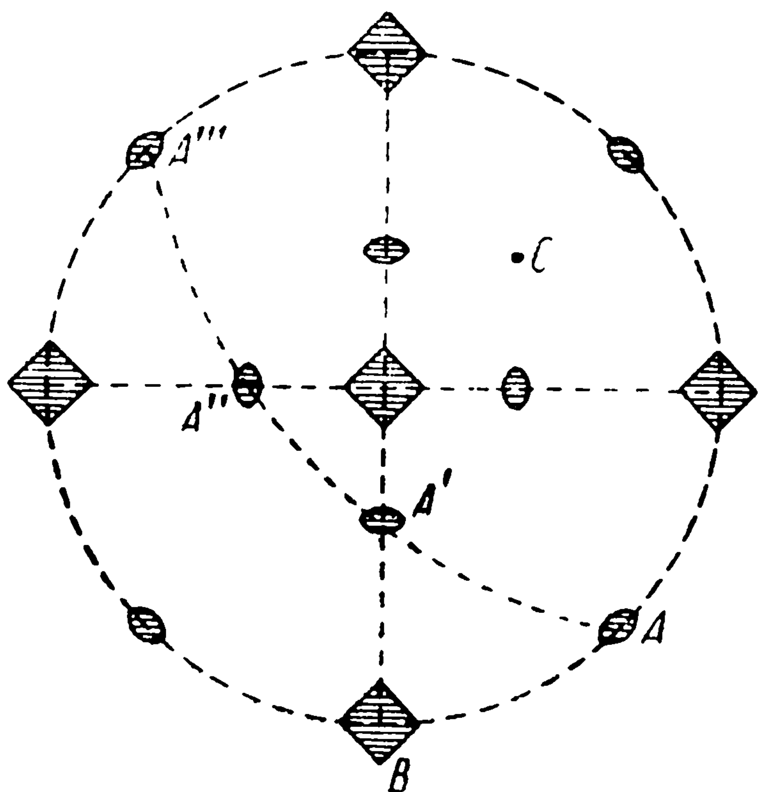
2) *Совокупления, в которых нет оси в 60°, но входит ось в 90°.*

[1] См. объяснение чертежей.

A) Если при этом будет другая ось в 90°, то она должна быть перпендикулярна к первой. В самом деле, если A и B (фиг. 6) — две оси в 90° и если угол $ABA' = 90°$ и $AB = A'B$, то A' должна быть третья ось в 90°. Треугольник ABA' дает

$$\cos AA' = \cos^2 BA.$$

Согласно § 8, BA и AA' могут иметь только значения в 45° или 90°; если $BA = 45°$, то $\cos AA' = \frac{1}{2}$, значение невозможное, поэтому BA, а следовательно, и AA' суть 90°.



Фиг. 7.

Итак, при двух осях в 90° будет еще третья ось 90°, и все эти три оси между собой перпендикулярны. При этом, согласно § 7, необходимо существует еще шесть осей в 180°, разделяющих пополам углы между осями в 90°; относительное положение всех этих осей, изображенное в стереографической проекции на фиг. 7, можем сделать нагляднее, представив себе куб, в котором оси в 90° соединяют середины граней; тогда оси в 180° будут соединять середины двух параллельных ребер, или если оси в 90° соответствуют главным осям правильной кристаллической системы, то оси в 180° будут направлены по ромбическим осям[11]. Две оси в 180° одного и того же октанта шара, как, например, оси A и A' (фиг. 7), образуют между собой угол в 60° (выше в сем же параграфе при $AB = 45°$ мы получили $AA' = 60°$), из чего следует (§ 6), что по необходимости существует еще ось совмещения C в 120°, перпендикулярная к плоскости, проходящей через оси A и A'. Но эта плоскость, проходящая еще через ось A'' и точку A''', находящуюся на другом

конце оси A, параллельна к плоскости октаэдра и перпендикулярна к диагонали куба или к тригональной [12] оси правильной кристаллической системы. По этой линии направлена поэтому ось в 120°; таких осей будет всего четыре, направленных по четырем диагоналям куба или, что все равно, по четырем тригональным осям.

Итак мы видели, *что существование двух осей в 90° влечет за собой существование третьей оси в 90°, шести осей в 180° и четырех осей в 120°. Относительное положение всех этих осей такое же, как и между главными, ромбическими и тригональными осями правильной кристаллической системы* (см. фиг. 27).

В) Если при оси 90° существует ось в 180°, образующая с ней угол в 45° (§ 8), то будет и другая ось в 90°, и поэтому случай этот совпадает с только что рассмотренным.

Остается рассмотреть случай, когда при оси в 90° существует ось в 180°, ей перпендикулярная. *Тогда будут всего четыре оси в 180°, заключающиеся все в плоскости, перпендикулярной к оси в 90°, причем углы между двумя смежными осями в 180° будут 45°* (§ 7). См. фиг. 32.

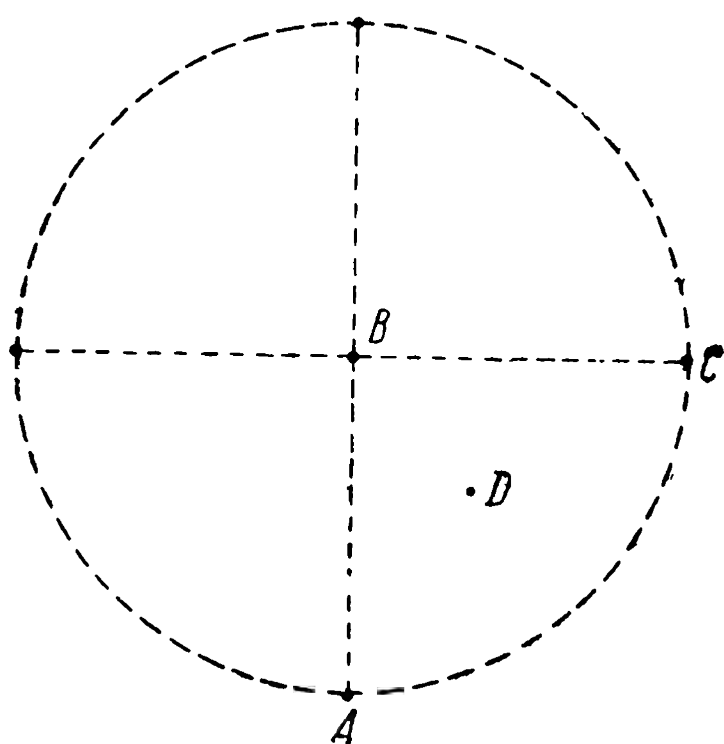
3) *Совокупления, в которых не существует ни оси в 60°, ни оси в 90°.*

Существование двух осей в 180° всегда влечет за собой существование оси совмещения, им перпендикулярной (§ 6). Поэтому, для того чтобы этот случай не совпал с одним из предыдущих, необходимо, чтобы наименьший угол между осями в 180° был или 90°, или 60°.

А) Если наименьший угол между двумя осями в 180° есть 90°, то будет существовать третья ось в 180°, перпендикулярная к первым (§ 6), так что *всего будут три оси в 180°, взаимно перпендикулярные* (фиг. 38).

В) Если угол между двумя осями в 180° есть 60°, то будет *таких осей в одной плоскости три, пересекающихся под углами в 60°, и ось в 120°, им перпендикулярная* (§ 6) См. фиг. 47.

Надобно доказать, что к этому случаю новых осей в 180° прибавить невозможно, не сведя этого случая на один из предыдущих. Очевидно, новая ось в 180° не может образовать со всеми прежними одни только углы в 60°, так что с одной из них она непременно должна образовать угол в 90°. Но в таком случае, согласно § 6, будет существовать новая ось в 180°, перпендикулярная к двум первым, т. е. будут три взаимно перпендикулярные оси в 180°; чтобы этот случай не совпал с одним из предыдущих, нужно, чтобы остальные оси в 180° образовали с этими тремя взаимно перпендикулярными осями углы или в 90° или в 60°. Ось, образующая с одной из них угол в 90°, падает в плоскости двух других, причем, если она совпадает с одной из них, то это не будет новая ось, если же она падает между ними и образует с одной угол 60°, то она образует с другой угол в 30°, что противно нашему положению. Остается, значит, положить, что новая ось образует с первыми тремя углы в 60°. Положим, что эта ось D (фиг. 8) падает внутри какого-нибудь октанта шара, углы которого образуются первыми тремя взаимно перпендикулярными осями в 180°. Заметим, что ни одна из дуг DA, DC и DB не может быть 120°, потому что они все меньше 90°, так что они все дожны быть 60°. Принимая в расчет равенство их между собой, а также что $AC = 90°$ и угол $ADC = 120°$, мы получим



Фиг. 8.

$$\cos^2 AD - \frac{1}{2}\sin^2 AD = 0,$$

откуда

$$\cos^2 AD = \frac{1}{3},$$

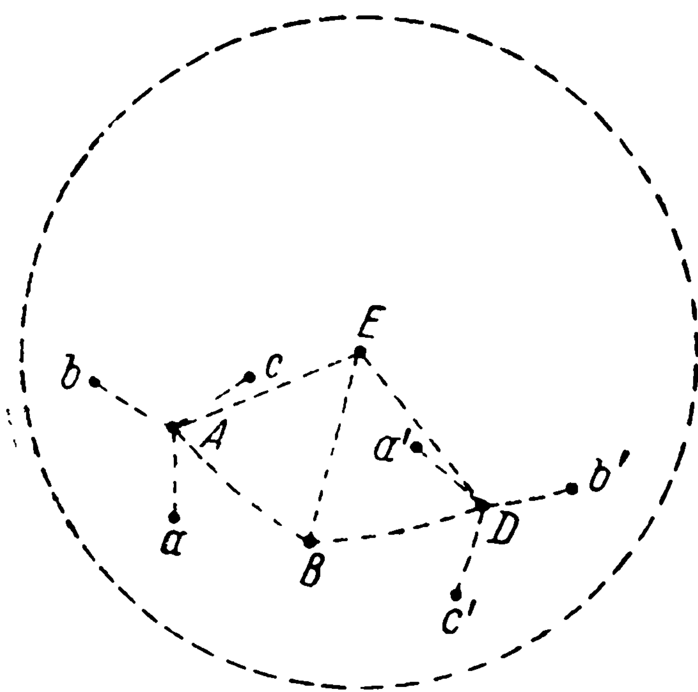
но мы имеем

$$\cos^2 60^\circ = \frac{1}{4},$$

из чего видно, что AD не есть 60°. Так как поэтому ни одна из остальных осей не может быть расположена согласно поставленным нами условиям, то мы заключаем, что прибавление к случаю 3, В (фиг. 47) новой оси в 180° сводит этот случай на один из предыдущих.

§ 11. Кроме пяти возможных случаев совокупления между собою осей в 180°, 90° и 60°, каждая из этих осей может еще существовать отдельно. В предыдущем параграфе мы также обратили внимание на расположение тех осей в 120°, которые необходимо должны существовать вместе с некоторыми известными совокуплениями осей в 180°, 90° и 60°. Спрашивается, нельзя ли еще совокупить оси в 120° с осями в 180°, 90° и 60° различным образом? Для этого заметим, что если ось в 120° B (фиг. 6) существует вместе с осью A в 180°, 90° или 60°, то при повороте дуги AB около B на 120° мы получим другую ось A' одного рода с A. Из этого следует, что ось в 120° может существовать с осью в 180°, 90° и 60° только тогда, если этих осей будет несколько; но в таком случае они должны образовать одно из пяти совокуплений, рассмотренных в предыдущем параграфе. Желая теперь изучить, к каким из этих пяти случаев можно присоединить еще ось в 120°, мы заметим, что при этом не следует предполагать для новой оси в 120° такое положение, которое к существующим уже осям в 180°, 90° и 60° прибавило бы еще новые такие же оси, потому что тогда рассматриваемый случай или сводился бы на один из прочих четырех случаев предыдущего параграфа, или же был бы совершенно невозможен. Для того же, чтобы ось в 120° не влекла за собой новых осей в 180°, 90° и 60°, необходимо, чтобы каждая из этих осей с двумя одноименными с ней образовала равносторонний треугольник, посредине которого будет проведена новая ось в 120°. При рассматривании с этой точки

зрения пяти случаев предыдущего параграфа легко убедиться в том, что при одном только случае 3, А трех осей в 180°, взаимно перпендикулярных (фиг. 38) может быть прибавлена новая ось в 120°. Но если существует одна такая ось, то совмещением около осей в 180° легко убедиться, что их должно существовать четыре, причем относительное положение осей будет такое, как если бы *оси в 180° совпали с главными осями правильной кристаллической системы, а оси в 120° направлены по тригональным осям* (фиг. 29).



Фиг. 9.

§ 12. *Кроме исчисленных в §§ 10 и 11 шести случаев совокупления между собой осей совмещения, четырех случаев, в которых какая-нибудь из осей 60°, 90°, 120° или 180° существует отдельно от других, и, наконец, случая, в котором нет ни одной оси совмещения, других случаев не может быть.* Чтобы доказать это, остается только показать, что при одновременном существовании двух осей в 120° непременно должна существовать какая-нибудь ось разноименная с ними; если это будет доказано, тогда понятно, что при одновременном существовании двух осей в 120° мы будем иметь один из случаев, уже рассмотренных выше. Пусть будут A и B (фиг. 9) два конца осей в 120°, образующих между собой угол не больше прямого. Пусть a будет перпендикуляр к какой-нибудь кристаллической грани; если $Aa = Ab = Ac$ и углы $aAb = bAc = cAa = 120°$, то b и c будут перпендикуляры к граням, с которыми a совмещается при вращении около оси A. Пусть, при повороте около оси B на угол $ABD = 120°$, A совмещается с D и грани a, b, c — с гранями a', b', c'. Все эти грани должны существовать по необходимости, как скоро существует грань a.

Я говорю, что если через точки A и D провести два больших круга AE и DE таким образом, чтобы образовался сферический четырехугольник $ABDE$, в котором один угол $B=120^\circ$ и два угла A и D по 60°, то E будет ось, около которой производится совмещение при повороте на угол AED. Чтобы доказать это, надобно только показать, что произвольно взятая грань кристалла a при этом повороте совмещается с какою-нибудь другою гранью кристалла. В самом деле, легко видеть, что при этом повороте грань a должна совместиться с гранью b'. Назвав угол aAB через α, мы имеем угол $aAE=60^\circ+\alpha$, угол $BDa'=\alpha$, $BDb'=120^\circ+\alpha$,[1] и если из последнего вычесть $BDE=60^\circ$, то получим угол $EDb'=$ $=60^\circ+\alpha=$ углу EAa. Притом, так как $AE=ED$, то при повороте около оси E на угол AED, дуга Aa совмещается с дугою Db', и так как эти дуги равны, то и точка a совмещается с точкой b'. Покажем, что угол совмещения AED не есть 120° или кратное от него. Для этого, заметив, что дуга BE разделяет пополам углы ABD и AED, мы имеем $AEB=\frac{1}{2}AED$ и из треугольника AEB:

$$\cos AEB=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos AB,$$

откуда

$$\cos AB=\frac{4\cos AEB+1}{3}.$$

Для угла AEB можно указать на некоторые пределы, между которыми должна находиться величина этого угла. Во-первых, нечего искать для него значений больше 180°, потому что в сферическом треугольнике AEB, один угол которого $E>180^\circ$, противоположная сторона AB также $>180^\circ$, между тем как по соглашению AB не больше 90°. Далее, так как $\cos AB$ не может быть отрицателен, то наименьшее

[1] Здесь подразумевается угол, обращенный к E, который может быть и больше 180°.

значение $\cos AEB$ будет $-\frac{1}{4}$. Поэтому угол AEB во всяком случае меньше 120°. С другой стороны, так как сумма трех углов в сферическом треугольнике непременно больше 180°, то AEB непременно больше 60°. Итак,

$$120° > AEB > 60°.$$

Но AEB есть половина угла AED, а потому

$$240° > AED > 120°.$$

Но AED есть угол, при котором может происходить совмещение, а потому он может иметь значения 60°, 90°, 120°, 180° и целых кратных от них. Но из всех этих углов существует один только, именно 180°, который заключается в данных выше пределах. Поэтому угол $AED = 180°$. Но так как при угле $AED = 180°$ дуги AE и DE, определяющие своим пересечением положение оси E, сливаются, то кажется, что в этом случае положение оси E будет неопределенное; нетрудно, однако, убедиться в том, что в этом случае середина дуги AED определит положение оси совмещения в 180°. Итак, одновременное существование двух осей в 120° влечет за собой существование оси совмещения в 180°, что и требовалось доказать.

Глава III

О ЗАКОНАХ СИММЕТРИИ [13]

§ 13. Окончив разбор различных случаев, представляющихся при равенстве совмещения, перейдем к ближайшему рассмотрению симметричного равенства, упомянутого в § 1. Пусть A и B (фиг. 2) будут два симметрично равных направления, и a' и b' — грани, соответствующие граням a и b. Если продолжать направление B, а также и перпендикуляры a' и b' по другую сторону центра шара, то получим при этом направление B_1, противоположное направлению B, и перпен-

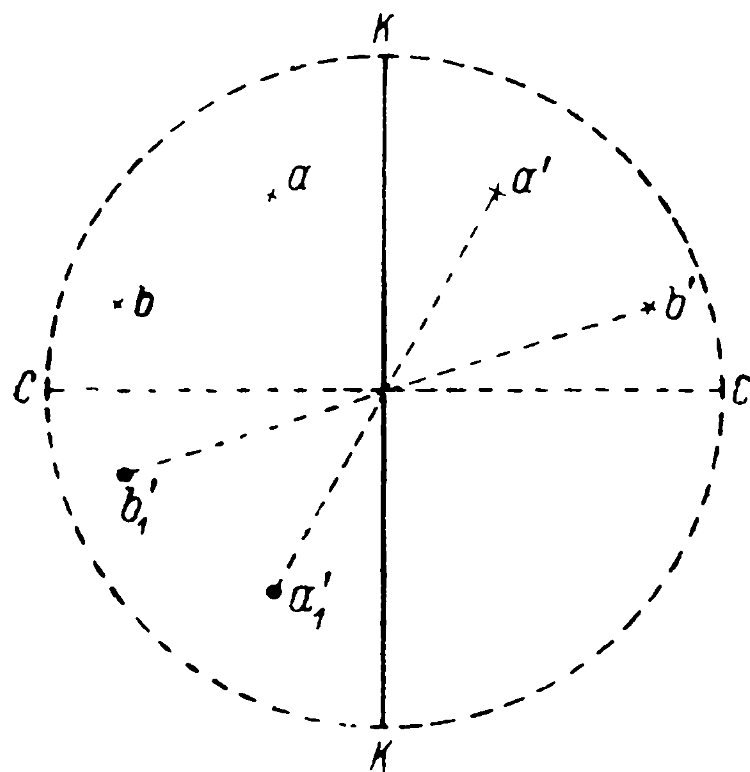
дикуляры a_1' и b_1', соответствующие плоскостям, параллельным граням a' и b', но находящимся на другой стороне кристалла. Очевидно, что *если эти плоскости a_1' и b_1' были бы действительно гранями кристалла,* то между направлениями A и B_1 имело бы место равенство совмещения и их можно было бы совместить поворотом около какой-нибудь оси C на некоторый угол α.

При построении, описанном в Приложении А и служащем для поверки закона рационального отношения между параметрами, каждая грань сливается с параллельной ей, из чего мы заключаем, что если какая-нибудь грань есть возможная кристаллическая плоскость, то и грань, ей параллельная, также будет возможна. Из этого следует, что хотя, может быть, грани a_1' и b_1' на самом деле не существуют в кристалле, но *они должны быть возможны,* для того чтобы могли существовать грани a' и b', им параллельные. Но возможность граней a_1' и b_1' обусловливается возможностью такой оси совмещения C, при повороте около которой на угол α, A совмещается с B_1 и грани a и b — с воображаемыми гранями a_1' и b_1', или, другими словами, делаются параллельными действительным граням a' и b', лежащим против них на другой стороне кристалла. На этом основании мы можем вывести, какие возможны различные случаи расположения симметрично равных направлений в кристалле. Угол, при котором производится совмещение A с B_1, может иметь значения 0, 60°, 90°, 120°, 180°. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

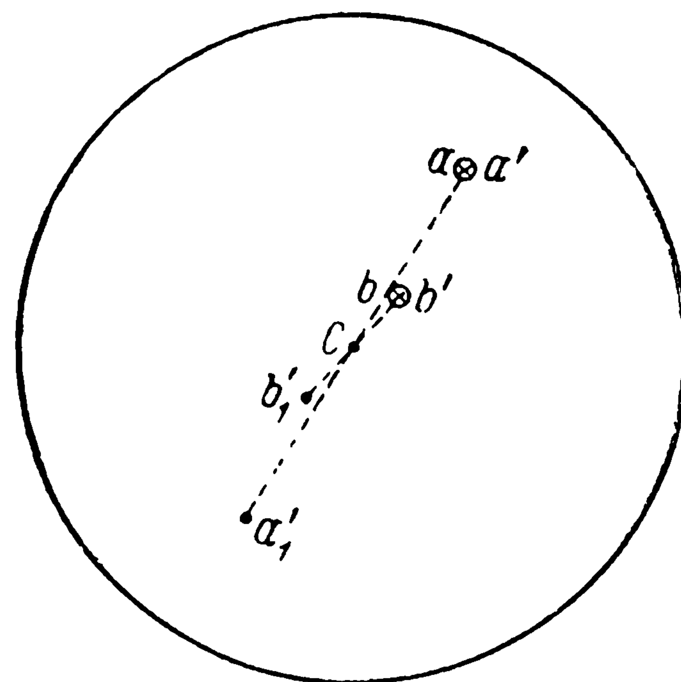
1) $\alpha = 0$; это значит, что A совпадает с B_1 и что, следовательно, без всякого поворота a параллельно a' и b параллельно b'. Каждое направление симметрично равно противоположному ему направлению и каждой грани кристалла соответствует другая ей параллельная. Этот закон для краткости будем называть *законом параллельности граней* [14].

2) $\alpha = 180°$ (мы представляем здесь два чертежа, фиг. 10 и 11; первый из них представляет проекцию на плоскость,

проходящую через воображаемую ось совмещения, а второй — проекцию на плоскость, перпендикулярную к этой оси). Если существует грань a выше бумаги,[1] то при повороте около оси совмещения C на 180° эта точка попадает в a_1' (ниже бумаги на фиг. 10 и выше бумаги на фиг. 11) и будет существовать грань ей параллельная, a' (выше бумаги на фиг. 10 и ниже бумаги на фиг. 11). Таким же образом грань b



Фиг. 10.



Фиг. 11.

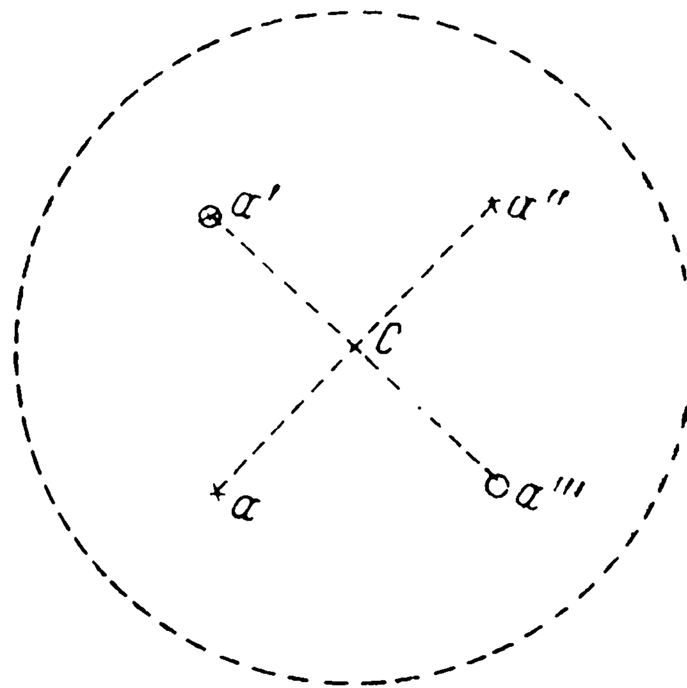
влечет за собой существование соответствующей ей грани b'. Очевидно, каждая грань с соответствующей ей расположены симметрично относительно плоскости, перпендикулярной к воображаемой оси совмещения C (на фиг. 10 плоскость симметрии есть KK, а на фиг. 11 — плоскость бумаги). Симметричное положение двух граней относительно так называемой плоскости симметрии обусловливается тем, что они с ней пересекаются по одной и той же прямой (или по параллельным прямым) и что угол между перпендикулярами к этим плоскостям разделяется пополам плоскостью симметрии.

---

[1] См. объяснение чертежей.

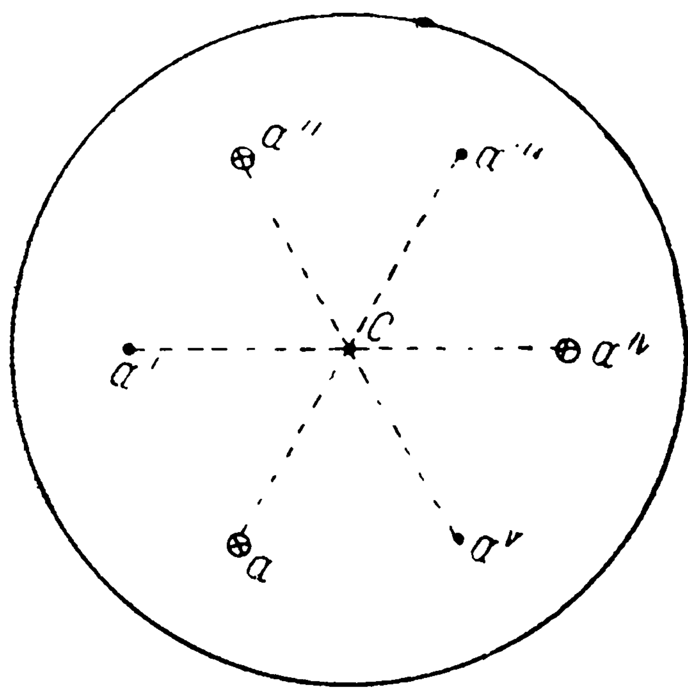
Ниже же мы этот случай обозначим тем, что будем говорить, что *существует такая-то плоскость симметрии* [15]. Очевидно, при этом будут симметрично равны каждые два направления, симметрично расположенные относительно плоскости симметрии.

3) $\alpha = 90°$. Если воображаемая ось совмещения будет C (фиг. 12) и существует грань a, то при повороте на 90° точка a сливается с верхней точкой a' и будет существовать грань a''', параллельная воображаемой грани a'. При повороте еще на 90° грань a''' сольется с нижнею гранью, проектирующейся в точке a, и будет существовать поэтому грань, ей параллельная, a'' верхняя; при повороте еще на 90° точка a'' сольется с верхней точкой a''' и будет существовать нижняя грань a', параллельная воображаемой грани a. Итак, существование одной грани a влечет за собой существование еще трех граней. Эти грани таким образом расположены, что две верхние грани сливаются между собой при повороте около оси C на 180°; то же самое имеет место с двумя нижними гранями, так что ось C есть действительная ось в 180°. Положение же нижних граней относительно верхних такое, что две грани, параллельные нижним, образуют с верхними гранями правильную четырехгранную пирамиду. Этот род симметрии мы будем называть *сфеноидальной симметрией* [16]. При этом равенство совмещения имеет место между какими угодно двумя направлениями, которые сливаются при повороте около оси C на 180°, а им симметрично равны будут два направления, противоположные тем направлениям, с которыми сливаются первые при повороте около C на 90°.



Фиг. 12.

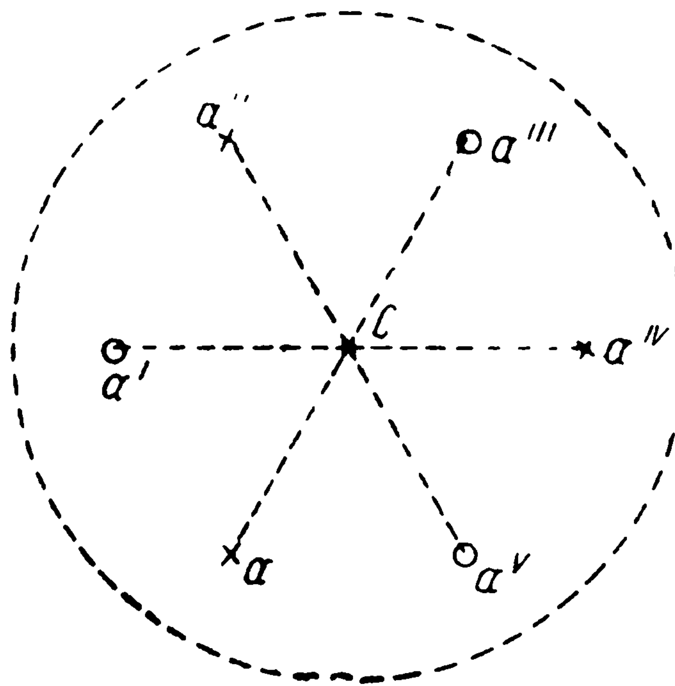
4) $\alpha = 60°$ [17]. Пусть будет C (фиг. 13) воображаемая ось совмещения, и a — какая-нибудь существующая грань. При повороте около оси C на 60°, a совпадает с верхней точкой a^{I} и будет существовать нижняя грань a^{IV}, параллельная воображаемой грани a^{I}. При повороте еще на 60°, грань a^{IV} сливается с нижней гранью a^{V} и будет существовать грань, ей параллельная, верхняя a^{II}. При новом повороте на 60°, грань a^{II} сливается с верхней гранью a^{III} и будет существовать грань, ей параллельная, нижняя a. При новом повороте на 60°, эта грань совпадает с нижней a^{I} и будет существовать грань, ей параллельная, верхняя a^{IV}, которая при новом повороте на 60° сливается с верхней гранью a^{V}, и будет существовать грань ей параллельная, нижняя грань a^{II}. Итак, существование одной грани влечет за собой существование еще пяти граней, все вместе они образуют двойную правильную трехгранную пирамиду. Этот закон симметрии тождествен с законом, данным одновременным существованием плоскости симметрии и оси совмещения с 120°, ей перпендикулярной. Совместимо равными здесь будут каждые три направления, совмещающиеся при повороте около оси C на 120°, а им симметрично равны три направления, расположенные симметрично с первыми относительно плоскости, перпендикулярной к оси C.



Фиг. 13.

5) $\alpha = 120°$ [18]. Пусть C (фиг. 14) будет воображаемая ось совмещения, и a — какая-нибудь существующая грань. При повороте на 120° эта грань сливается с a^{II} и будет существовать параллельная ей грань a^{V}, которая при новом повороте на 120° сольется с нижней гранью a^{I}, вследствие чего будет существовать верхняя грань a^{IV}, параллельная воображаемой

грани a^{I}. При новом повороте на 120° грань a^{IV} сольется с a, вследствие чего будет существовать нижняя грань a^{III}, ей параллельная; эта же последняя при новом повороте на 120° сольется с a^{V}, вследствие чего будет существовать верхняя грань a^{II}, которая в свою очередь влечет за собой существование нижней грани a^{I}, параллельной уже существующей грани a^{IV}. Итак, совокупностью всех шести плоскостей, по необходимости существующих вместе, образуется ромбоэдр. Этот закон симметрии можно заменить одновременным существованием оси совмещения в 120° с законом параллельности. Какое-нибудь направление будет симметрично равно с направлением прямо ему противоположным и совместимо равно с теми направлениями, с которыми оно совмещается при повороте около оси C на 120°.

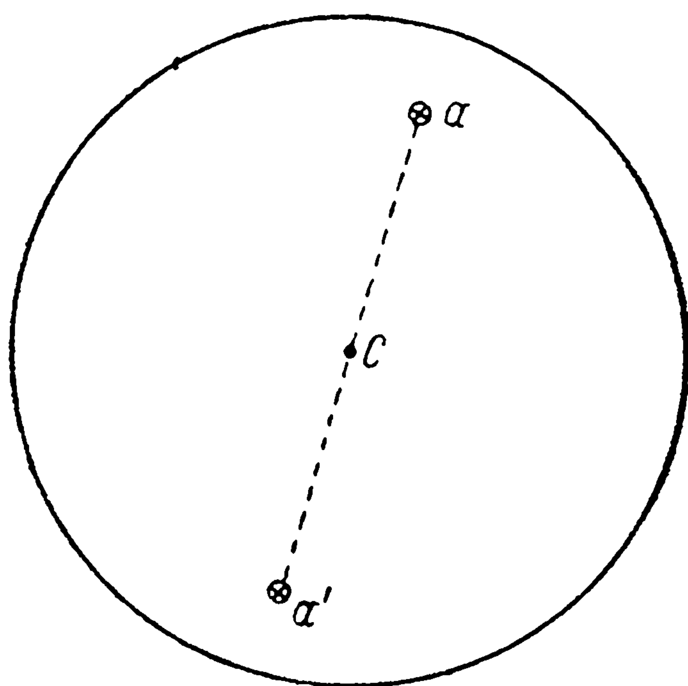


Фиг. 14.

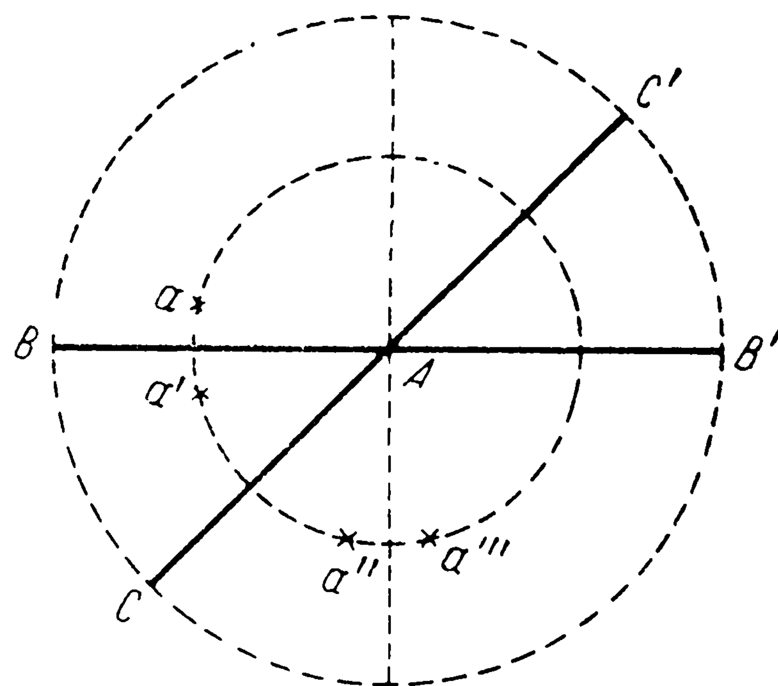
§ 14. Для того чтобы посмотреть, какие возможны совокупления законов симметрии с осями совмещения, мы одиннадцать случаев §§ 10, 11 и 12 сначала совокупим с законом параллельности и, получив при этом одиннадцать новых случаев, мы все двадцать два случая совокупим с плоскостью симметрии всеми возможными способами и за этим прибавим закон сфеноидальной симметрии к тем из прежде полученных случаев, к которым этот закон может быть прибавлен. Таким образом, мы получим все возможные случаи совокупления осей совмещения с законами симметрии. О законах симметрии 4 и 5 предыдущего параграфа нам при этом заботиться нечего, так как они суть не что иное, как совокупление плоскости симметрии или закона параллельности с осью совмещения, то они сами собою взойдут в полученные вышеизложенным способом совокупления.

§ 15. Приступая к вышеизложенному совокуплению осей совмещения с законами симметрии, мы заметим, что:

1) *Ось совмещения в 180°, 90° или 60° вместе с законом параллельности дают плоскость симметрии, перпендикулярную к оси совмещения* [19]. В самом деле, если C (фиг. 15) есть ось совмещения в 180°, 90° или 60°, то существование верхней грани a влечет за собой существование другой верхней грани a'; если при этом имеет место закон параллельности, то будут существовать и нижние грани a и a'. Следо-



Фиг. 15.



Фиг. 16.

вательно, существует и плоскость симметрии, перпендикулярная к оси C.

2) *Существование плоскости симметрии и оси совмещения в 180°, 90° или 60° к ней перпендикулярной влечет за собою закон параллельности.* В самом деле, если существует верхняя грань a (фиг. 15), то вследствие плоскости симметрии будет существовать и нижняя грань a, а вследствие существования оси в 180°, 90° или 60° и верхняя и нижняя грани a', которые и будут параллельны обеим граням a.

3) *Существование двух плоскостей симметрии, пересекающихся под углом α, влечет за собою существование оси совмещения в 2α, направленной по прямой их пересечения.* Пусть будут две плоскости симметрии BAB' и CAC' (фиг. 16),

пересекающиеся под углом $BAC = \alpha$. Существование грани a влечет за собой существование другой грани a', симметрично с ней расположенной относительно плоскости BAB', так что a и a' лежат на одном и том же малом круге, которого центр есть A. Грани a'' и a''', симметрично с ними расположенные относительно плоскости CAC', лежат на том же малом круге, и легко убедиться в том, что при повороте около оси A на угол 2α грань a совместится с гранью a'' и грань a' — с гранью a'''. Из этого следует, что прямая A есть ось совмещения в 2α.

4) Легко понятна также и справедливость обратного предложения — *что существование оси совмещения в 2α и плоскости симметрии, через нее проходящей, влечет за собою существование другой плоскости симметрии, проходящей через ту же ось совмещения и образующей с первою плоскостью угол α.*

§ 16. Вследствие § 15, 1, при совокуплении закона параллельных с различными случаями расположения осей совмещения, исчисленных в §§ 10, 11 и 12, мы получим плоскости симметрии, перпендикулярные к каждой из осей совмещения в 180°, 90° и 60°.

1) Случай § 10, 2, А (фиг. 27) дает *девять плоскостей симметрии, из которых три проходят через оси в 90°, а остальные шесть через каждые две оси в 120°* (фиг. 28[1]).

2) Случай § 11 (фиг. 29) дает *три плоскости симметрии взаимно перпендикулярные, проходящие через оси в 180° в равном расстоянии от осей в 120°* (фиг. 30).

3) Случай § 10, 2, В (фиг. 32) дает *пять плоскостей симметрии, из них четыре, проходящие через ось в 90°, и по одной оси в 180° пересекаются под углами в 45°, а пятая, проходящая через все оси в 180°, к ним перпендикулярна* (фиг. 33).

---

[1] Пересечения плоскостей симметрии с шаром мы обозначили толстыми линиями.

4) Случай § 12 (фиг. 35), в котором одна только ось в 90° дает *плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси в 90°* (фиг. 36).

5) Случай § 10 3, А (фиг. 38) дает *три плоскости симметрии, взаимно перпендикулярные, проходящие через оси в 180°* (фиг. 39).

6) Случай § 12 (фиг. 41), в котором всего одна ось в 180° дает *плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси в 180°* (фиг. 42).

7) Случай § 10, 1 (фиг. 44) дает *семь плоскостей симметрии, из которых шесть пересекающихся под углами в 30° проходят через ось в 60° и по одной оси в 180°, а седьмая к ним перпендикулярна* (фиг. 45).

8) Случай § 12 (фиг. 50), в котором существует всего одна ось в 60°, дает *плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси в 60°* (фиг. 51).

9) Случай § 10, 3, В (фиг. 47) дает *три плоскости симметрии, пересекающиеся под углами в 60°, проходящие через ось в 120° и посредине между двумя осями в 180°* (фиг. 48).

10) Случай § 12 (фиг. 53), в котором всего одна ось в 120°, не дает вовсе плоскости симметрии; это есть пятый случай симметрии § 13, который мы и там представили просто как *совокупление оси в 120° с законом параллельности* (фиг. 56).

11) Случай § 12 (фиг. 58), в котором нет вовсе оси совмещения, дает *случай, характеризующийся одним только законом параллельности* (фиг. 57).

§ 17.[20]. Из § 13 видно, что плоскость симметрии только тогда возможна, когда возможна ось в 180°, к ней перпендикулярная. Поэтому к вышеприведенным двадцати двум случаям §§ 10, 11, 12 и 16 мы вправе прибавлять только такие плоскости симметрии, которые перпендикулярны к возможным осям в 180°. Если же прибавим плоскость симметрии, перпендикулярную к действительно существующей оси в 180°

(90° или 60°), то мы впадаем в повторения, потому что тогда вследствие § 15, 2, будет иметь место закон параллельности, который уже был рассмотрен в совокуплении с осями совмещения. Также нечего прибавлять плоскостей симметрии к одиннадцати случаям предыдущего параграфа, в которых существует уже закон параллельности, потому что от прибавления новой плоскости симметрии прибавится новая ось в 180°, а соединения всех возможных совокуплений осей совмещения с законом параллельности уже были рассмотрены. Остается, значит, прибавлять плоскости симметрии только к таким случаям §§ 10, 11 и 12, которые от прибавления новых осей в 180° могут переходить в другие из этих же случаев. Мы тогда должны прибавлять плоскости симметрии перпендикулярно к таким осям в 180°, которые могли бы быть, хотя на самом деле они не существуют. Рассматривая с этой точки зрения случаи §§ 10, 11 и 12, мы видим:

1) Что случай § 11 (фиг. 29) переходит в случай § 10, 2, A (фиг. 27) от прибавления осей в 180°, направленных по ромбическим осям. Если прибавим плоскость симметрии, перпендикулярную к одной из этих осей, то вследствие существования осей в 120°, мы будем иметь *шесть таких плоскостей симметрии, из которых каждая будет перпендикулярна к одной из ромбических осей* (фиг. 31) [21].

2) Случай § 12, в котором существует всего одна ось в 90° (фиг. 35), от прибавления оси в 180° переходит в случай § 10, 2, B (фиг. 32). Прибавляя плоскость симметрии, перпендикулярную к этой оси, мы получим, вследствие существования оси в 90°, на основании § 15, 4, *четыре плоскости симметрии, пересекающиеся по этой оси в 90°, каждые две смежные под углами в 45°* (фиг. 37) [22].

3) Случай § 10, 3, A (фиг. 38) от прибавления оси в 180°, разделяющей пополам угол между двумя уже существующими осями в 180°, обращается в случай § 10, 2, B (фиг. 32) [23]. Если прибавить плоскость симметрии, перпендикулярную к этой воображаемой оси в 180°, то вследствие § 15, 4, получим

всего таких *плоскостей симметрии две, пересекающиеся по одной из осей в 180° и разделяющие пополам углы между двумя другими* (фиг. 40).

К этому случаю § 10, 3, А (фиг. 38) мы могли бы прибавить и другие оси в 180° и, значит, плоскости симметрии, им перпендикулярные; но действительно существующие оси в 180°, случая § 10, 3, А, не будут расположены симметрично относительно таких плоскостей симметрии, а потому существование их влекло бы за собою действительное существование новых осей совмещения, из чего видно, что случаи, которые мы можем получить этим путем, совпадут с случаями, полученными из других комбинаций осей совмещения от прибавления таких плоскостей симметрии, которые не влекут за собой существование новых осей совмещения.

4) Случай § 12, в котором существует одна только ось в 180° (фиг. 41), от прибавления оси в 180°, к ней перпендикулярной, переходит в случай § 10, 3, А (фиг. 38). Прибавляя плоскость симметрии, перпендикулярную к этой воображаемой оси в 180°, мы получим вследствие § 15, 4, еще и *другую плоскость симметрии, также проходящую через существующую ось в 180° перпендикулярно к первой* (фиг. 43) [24].

Если прибавить еще плоскость симметрии, проходящую через эту ось, то вследствие § 15, 3, ось в 180° изменяет свой характер (т. е. переходит или в ось в 90° или в 60°), и случай этот совпадает с одним из тех, которые получаются другим путем. Прибавлять же плоскости симметрии, не проходящие через существующую ось в 180°, также нечего, на основании замечания, сделанного при предыдущем пункте.

5) К случаю § 12, в котором не существует ни одной оси совмещения (фиг. 58), мы можем прибавить произвольную *плоскость симметрии* и получим случай фиг. 46.

Другой плоскости симметрии, кроме этой, прибавлять нечего, потому что тогда явится и ось совмещения (§ 15, 3).

6) Если к случаю § 10. 3, В (фиг. 47) прибавить ось в 180°, разделяющую пополам угол между существующими осями,

то мы получим случай § 10, 1 (фиг. 44). Из этого видно, что здесь можно прибавить плоскость симметрии, которая будет проходить через ось в 120° и одну существующую ось в 180°: вследствие свойства оси в 120° *таких плоскостей симметрии будет три, проходящих каждая через ось в 120° и одну из осей в 180°*, и вследствие § 15, 4, *будет существовать еще четвертая плоскссть симметрии, перпендикулярная к трем первым и проходящая через все оси в 180°* (фиг. 49)[25].

К этому случаю, на основании сделанных выше замечаний, также нечего прибавлять плоскостей симметрии, относительно которых существующие оси не будут расположены симметрично. Плоскость симметрии же, проведенная через оси в 180°, влечет за собою существование трех других плоскостей, проходящих через ось в 120°, так что это есть случай, уже рассмотренный в сем же пункте.

7) От прибавления к случаю § 12, в котором существует одна ось в 60° (фиг. 50), оси в 180° этот случай переходит в случай § 10, 1 (фиг. 44). Здесь возможно поэтому прибавить плоскость симметрии, проходящую через ось в 60°, и таких *плоскостей симметрии* тогда по необходимости будет *шесть* (§ 15, 4), *пересекающихся все по оси в 60°, так что угол между двумя смежными плоскостями будет 30°* (фиг. 52)[26].

8) От прибавления к случаю § 12, в котором существует всего одна ось в 120° (фиг. 53), оси в 180°, совпадающей с осью в 120°, мы получим случай § 12, в котором всего одна ось в 60° (фиг. 50). Поэтому мы имеем право к этому случаю прибавить *плоскость симметрии, перпендикулярную к оси в 120°*, и получим случай симметрии § 13, 4 (фиг. 54)[27].

9) От прибавления к тому же случаю § 12, в котором всего одна ось в 120° (фиг. 53), оси в 180°, ей перпендикулярной, мы получим случай § 10, 3 (фиг. 47); мы поэтому вправе здесь прибавить плоскость симметрии, проходящую через ось в 120°; таких *плоскостей симметрии* тогда по

необходимости будет *три, пересекающихся по оси в 120° под углами в 60°* (фиг. 55)[28].

Прибавление других плоскостей симметрии влечет за собою существование новых осей совмещения.

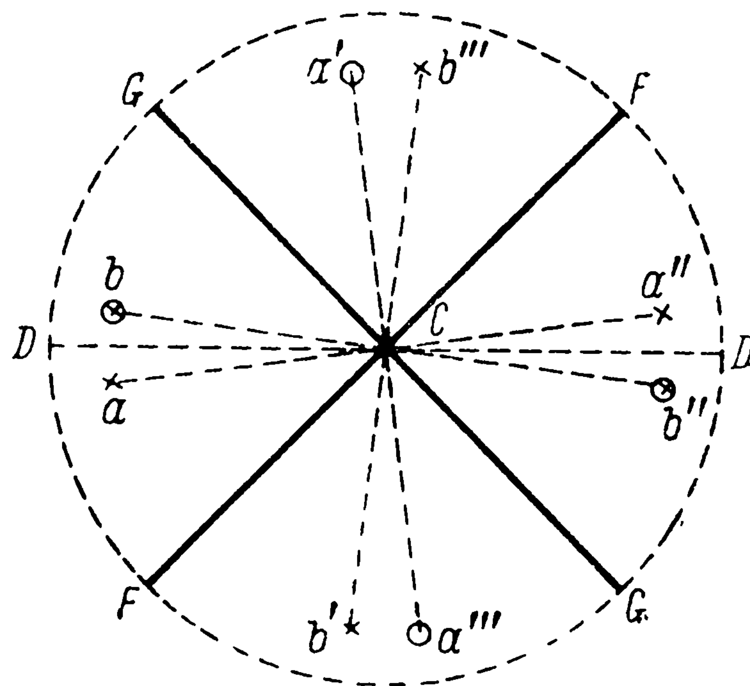
От прибавления к случаю фиг. 32 оси в 180°, разделяющей пополам угол между осью в 90° и одною осью в 180°, случай этот переходит в изображенный на фиг. 27. Прибавление плоскости симметрии, перпендикулярной к новой оси в 180°, влечет за собою новую ось в 90°, из чего видно, что этот случай уже должен быть получен другим путем.

Остальные два случая совокупления осей совмещения, а именно: § 10, 2, A (фиг. 27) и § 10, 1 (фиг. 44), суть такие, к которым новых осей в 180° прибавить невозможно, а потому и нельзя к ним прибавить плоскостей симметрии, не влекущих за собою закона параллельности.

§ 18. Остается комбинировать с предыдущими случаями сфеноидальную симметрию § 13, 3. Для этого заметим, что этот закон может существовать только там, где существует ось в 180°, которая может обратиться в ось в 90°. Из различных комбинаций осей совмещения этот случай имеет место только в комбинациях § 11 (фиг. 29), § 10, 3, A (фиг. 38) и случая § 12, в котором одна только ось в 180° (фиг. 41), и в случаях, от них производимых прибавлением плоскостей симметрии (фиг. 31, 40, 43) или закона параллельности (фиг. 30, 39, 42). Покажем сначала, что если комбинировать сфеноидальную симметрию с случаем § 10, 3, A трех взаимно перпендикулярных осей в 180° (фиг. 38), то получим случай § 17, 3 (фиг. 40). В самом деле, по закону сфеноидальной симметрии, если ось в 180° C (фиг. 17) будет ось этой симметрии, то будут существовать вместе четыре грани a, a', a'' и a'''. Существование другой оси DD в 180°, перпендикулярной к оси C, влечет за собою существование четырех новых граней b, b', b'' и b'''. Эти восемь граней, очевидно, расположены симметрично относительно двух плоскостей FF и GG, проходящих через ось сфеноидальной симметрии C и разде-

ляющих пополам углы между двумя другими осями в 180°. Итак, прибавление сфеноидальной симметрии к случаю § 10, 3, A, дает нам случай § 17, 3 (фиг. 40), уже полученный другим путем.

Так как в случае § 11 (фиг. 29) также существуют три взаимно перпендикулярные оси в 180°, то прибавление к нему закона сфеноидальной симметрии также дает нам две плоскости симметрии, проходящие через оси в 120°; по свойству же этих последних осей, таких плоскостей всего будет шесть, и мы получим случай § 17, 1 (фиг. 31), уже прежде найденный. Тут все оси в 180° уже обратились в оси сфеноидальной симметрии, так что дальнейшее прибавление к этому случаю этой симметрии невозможно. К случаю же § 17, 3 (фиг. 40) мы еще можем прибавить сфеноидальную симметрию относительно другой оси в 180°, но тогда, очевидно, и этот случай обратится в случай § 17, 1 (фиг. 31).



Фиг. 17.

Единственный новый случай мы получим, прибавляя сфеноидальную симметрию к случаю § 12, в котором всего одна ось в 180° (фиг. 41); мы тогда получим чистую *сфеноидальную симметрию без всяких прибавлений* (фиг. 34).

К случаям, происшедшим от выше рассмотренных трех (фиг. 29, 38 и 41) прибавлением закона параллельности, нечего прибавлять сфеноидальную симметрию, потому что эта симметрия в соединении с законом параллельности дает ось совмещения в 90°. Также нетрудно видеть, что прибавление сфеноидальной симметрии к случаю § 17, 4 (фиг. 43) дает случай, уже полученный § 17, 3 (фиг. 40).

Глава IV

ОБЗОР КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 19. Для лучшего обзора установленных нами 32 кристаллографических групп, соединим в более обширные группы, или *системы*, те из них, которые обладают известными сходными качествами. Эти системы, соединяющие в себе по нескольку из наших групп, будут те же самые, которые вообще устанавливаются в кристаллографиях под названием кристаллических систем.

Таким образом, пять групп (фиг. 27, 28, 29, 30 и 31), характеризуемых присутствием более одной оси в 120°, образуют *правильную кристаллографическую систему* [29]. Семь групп (фиг. 32, 33, 34, 35, 36, 37 и 40), характеризуемых присутствием одной только оси в 90° или сфеноидальной симметрии, ее заменяющей, составляют *квадратную кристаллографическую систему* [30]. Три группы (фиг. 38, 39 и 43), характеризуемые присутствием трех взаимно перпендикулярных осей в 180° или плоскостей симметрии, заменяющих оси в 180°, им перпендикулярные или существующие вместе с ними, составляют *ромбическую систему* [31]. Три группы (фиг. 41, 42 и 46), характеризуемые присутствием одной только оси в 180° или плоскости симметрии, перпендикулярной к этой оси и существующей или вместе с этой осью, или ее заменяющей, составляют *систему моноклиноэдрическую* [32]. Две группы (фиг. 57 и 58), характеризуемые отсутствием всякой оси совмещения и плоскости симметрии, составляют *триклиноэдрическую систему* [33]. Двенадцать групп (фиг. 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55 и 56), характеризуемых присутствием не более одной оси в 120° или в 60°, составляют *гексагональную систему* [34].

§ 20. Покажем теперь, каким образом группы, составляющие каждую из этих систем, соответствуют принятым вообще в кристаллографиях подразделениям систем. В этих подразделениях мы будем употреблять терминологию Наумана, как

наиболее развитую. При этом мы обратим внимание на означенные на наших фигурах грани, составляющие общую простую форму, или совокупность всех граней, которые должны существовать вместе с одной какой-нибудь данной гранью.[1]

А. Правильная система

1) Фиг. 28 соответствует голоэдрическим формам этой системы. Общая форма есть сорокавосьмигранник [[35]]. Совместимо равны между собою двадцать четыре направления, расположенные как перпендикуляры к двадцати четырем попеременным граням, а им симметрично равны направления, прямо им противоположные.

2) Фиг. 27 соответствует попеременно-плоскостной гемиэдрии [[36]]. Общая форма есть пентагональный двадцатичетырехгранник, получаемый из сорокавосьмигранника пропусканием попеременных плоскостей. Совместимо равны между собою те же направления, как и в предыдущей группе, т. е. направления, расположенные как перпендикуляры к граням основной формы. Симметрично равных направлений вовсе нет. Гемиэдрия эта хотя и приводится у Наумана, но в природе она еще не открыта.

3) Фиг. 31 соответствует тетраэдрической гемиэдрии [[37]]. Общая форма есть гексакис-тетраэдр, получаемый из сорока-

[1] На фигурах совместимо равные направления обозначены одинаковыми буквами (или *a*, или *b*) и притом таким образом, что направления *a* совместимо равны между собою, а им симметрично равны направления *b*, которые в свою очередь также совместимо равны между собою. Направления, проведенные из центра к нижней половине шара, обозначены *a'* и *b'*. В тех фигурах, где проекции верхнего и нижнего направления совпадают в одну точку, знаки их поставлены рядом. Те самые точки, которые обозначают равные направления, обозначают также и точки касания с шаром граней простой общей формы, причем те из этих точек, которые проходят выше бумаги, обозначены крестиком, а проходящие ниже — кружком. Если же точки касания верхней и нижней плоскости совпадают, то такая точка обозначена крестиком, обведенным кружком.

восьмигранника пропусканием попеременных октаэдрических групп граней. Совместимо равно между собой половинное число направлений против предыдущей группы, или двенадцать направлений, расположенных как перпендикуляры к попеременным граням общей формы, и симметрично равны предыдущим другие двенадцать направлений, расположенных как перпендикуляры к другим двенадцати граням общей формы, т. е. такие направления, которые в голоэдрических формах также были симметрично равны первым направлениям, но которые в попеременно-плоскостной гемиэдрии им вовсе не были равны.

4) Фиг. 30 соответствует додекаэдрической гемиэдрии [38]. Общая форма есть диакис-додекаэдр (или ломаный пентагональный додекаэдр), получаемый из сорокавосьмигранника пропусканием пар плоскостей, лежащих у попеременных средних ребер. Совместимо равны между собою те же направления, как и в тетраэдрической гемиэдрии, но симметрично им равны другие, а именно направления прямо противоположные первым.

5) Фиг. 29 соответствует тетратоэдрии [39]. Общая форма есть тетраэдрический пентагональный додекаэдр, который можно получить из сорокавосьмигранника пропусканием попеременных октаэдрических групп граней и в остающихся группах еще попеременных граней. Совместимо равны между собой те же самые направления, как и в тетраэдрической и пентагональной гемиэдрии, но симметрично им равных направлений вовсе нет.

Б. Квадратная система

1) Фиг. 33 соответствует голоэдрическим формам. Общая форма есть двойная дитетрагональная или восьмисторонняя пирамида [40]. Совместимо равны между собою восемь направлений, расположенных как перпендикуляры к попеременным плоскостям основной формы, или, если выразиться иначе, четыре направления, совмещающиеся при повороте на 90°

около оси совмещения в 90°, и четыре других направления, находящиеся с первыми в одинаковых расстояниях от одного и того же конца какой-нибудь оси в 180° и от противоположных концов оси в 90°. Симметрично равны этим восьми направлениям другие восемь направлений, прямо противоположные первым.

2) Фиг. 32 соответствует трапецоэдрической гемиэдрии. Общая форма есть тетрагональный трапецоэдр [41]. Совместимо равны между собой те же самые направления, как и в голоэдрических формах, но направлений симметрично равных вовсе нет.

3) Фиг. 40 соответствует сфеноидальной гемиэдрии. Общая форма есть тетрагональный скаленоэдр [42]. Совместимо равны четыре направления, расположенные симметрично относительно оси сфеноидальной симметрии и относительно одной из других осей в 180°, и симметрично равны первым четыре направления, расположенные симметрично с первыми относительно одной из плоскостей симметрии. Другими словами, совместимо равные направления расположены одинаково с перпендикулярами к двум парам граней, пересекающихся по противоположным средним ребрам, тогда как симметрично им равные расположены как перпендикуляры к прочим граням общей формы.

4) Фиг. 36 соответствует пирамидальной гемиэдрии. Общая форма есть четырехгранная или квадратная пирамида [43]. Совместимо равны будут какие-нибудь четыре направления, которые совмещаются при повороте около оси в 90° на 90°, а им симметрично равны четыре направления, расположенны с первыми симметрично относительно плоскости симметрии. Другими словами, четыре равные направления расположены как перпендикуляры к граням верхней или нижней пирамиды, а симметрично равные им направления — как перпендикуляры к граням противоположной пирамиды.

5) Фиг. 34 соответствует сфеноидальной тетартоэдрии. Общая форма есть тетрагональный сфеноид [44]. Совместимо

равны два направления, симметрично расположенные относительно оси сфеноидальной симметрии, и симметрично равны первым два направления, которые прямо противоположны тем направлениям, с которыми совпадают первые два направления при повороте около оси симметрии на 90°. Другими словами, совместимо равные направления будут расположены как перпендикуляры к двум граням, сходящимся к одному концу этой оси, а симметрично им равные — как перпендикуляры к граням, сходящимся к другому концу.

6) Фиг. 37 соответствует гемиморфии голоэдрических форм [45]. Общая форма есть одна половина дитетрагональной пирамиды, в которой сохранены грани, сходящиеся на одном из концов оси в 90°. Совместимо равны четыре направления, совмещающиеся при поворотах около оси в 90° на 90°, и симметрично равны им четыре направления, расположенные симметрично первым относительно плоскостей симметрии. Другими словами, совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням основной формы, а им симметрично равные — как перпендикуляры к остальным граням.

7) Фиг. 35 соответствует гемиморфии пирамидальной и трапецоидальной гемиэдрии [46]. Основная форма есть половина квадратной пирамиды, в которой сохранены плоскости, сходящиеся на одном конце оси в 90°. Совместимо равны четыре направления, совмещающиеся при поворотах на 90° около оси в 90°. Эти направления расположены как перпендикуляры к граням основной формы. Направлений симметрично равных вовсе нет.

Примечание. Из приведенных выше групп, трапецоэдрическая гемиэдрия имеет в природе одного только представителя, а именно вульфенит, который, по всей вероятности, кристаллизуется по закону этой гемиэдрии. Для сфеноидальной же тетартоэдрии и двух родов гемиморфий в природе представителей не открыто [47]. Эта тетартоэдрия, однако, приводится Науманом, но о геми-

морфиях он умалчивает, вероятно, не потому, что он их считает невозможными, но вообще на гемиморфии он обращает мало внимания. Зато приводится Науманом еще несколько групп квадратной системы, которые мы считаем невозможными; формы же, к ним причисляемые, мы считаем принадлежащими к другим системам. Эти группы суть:

1) Ромботипная гемиэдрия, формы которой мы причисляем к ромбической системе. Главным представителем этой гемиэдрии считался гармотом, который, однако, ныне Деклуазо (Descloizeaux, Manuel de mineralogie, т. I, стр. 413), по новым своим исследованиям причисляет к ромбической системе.[1] К этой же гемиэдрии Гискарди (Guiscardi. Kenngott. Uebersicht., 1859, стр. 85) причисляет гуаринит; оптические свойства этого минерала, однако, не исследованы, а потому принадлежность его к квадратной системе подвержена сомнению. Так как в кислом фосфорнокислом натре, причисляемом Митчерлихом к ромбической системе (Rammelsberg, Kryst. Chemie, стр. 129), отношение макродиагонали к главной оси в одном из видоизменений этой соли есть как 2:1, то можно было бы и эту соль причислить к ромботипной гемиэдрии квадратной системы. Этого, однако, никто не делает, и оптические исследования, по всей вероятности, показали бы, что форма эта ромбическая.

2) Ромботипная тетартоэдрия, которая, по-нашему, есть не что иное, как сфеноидальная гемиэдрия ромбической системы. Не открыто пока тел, которые можно было бы причислить к этой тетартоэдрии.

3) Гемиморфия сфеноидальной гемиэдрии, которая, по-нашему, есть не что иное, как гемиморфия голоэдрических форм ромбической системы. К этой гемиморфии относит Вертер (Journ. f. prakt. Chemie, т. 35, стр. 51) мочевину, в которой, однако, гемиморфизм проявляется только отно-

---

[1] См. ниже о ромбической системе.

сительно основной плоскости, редко встречающейся, тогда как сфеноид и призма первого рода являются всегда с полным числом граней, что противно характеру этой гемиморфии. Поэтому исчезание одной из основных плоскостей надо считать случайностью и относить формы мочевины к сфеноидальной гемиэдрии до тех пор, пока не будет доказано, что кристаллы мочевины по физическим своим свойствам, а именно относительно появления электрической полярности при нагревании, имеют характер гемиморфический. Сказанное здесь о мочевине применяется и к тому видоизменению рутила, которое, согласно Гайдингеру (Kokscharof, Materialien, т. IV, стр. 36), является сфеноидальною гемиэдрией с гемиморфным проявлением основной плоскости.

4) Особенная мероэдрия, которая, по-нашему, есть не что иное, как голоэдрия моноклиноэдрической системы. Мероэдрия эта была установлена на основании исследований Густава Розе над сульфаминовым аммонием (Pogg. Ann., т. 47, стр. 476), но измерения представляют слишком малую точность, чтобы доказать, что форма действительно может быть отнесена к осям квадратной системы, и притом нет оптических исследований, подтверждающих принадлежность этой формы к квадратной системе.

В. Гексагональная система

1) Фиг. 45 соответствует голоэдрии. Общая форма есть дигексагональная пирамида [18]. Совместимо равны двенадцать направлений, из которых шесть совмещаются при последовательных поворотах на 60° около оси в 60°, а другие шесть расположены симметрично с первыми относительно осей в 180°; симметрично равны первым другие двенадцать направлений, им прямо противоположных. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням основной формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням этой формы.

2) Фиг. 44 соответствует трапецоэдрической гемиэдрии. Общая форма — гексагональный трапецоэдр [49]. Совместимо равных направлений — двенадцать, расположенных точно так же, как и в голоэдрических формах; симметрично равных направлений вовсе нет. Эта гемиэдрия приводится Науманом, хотя в природе не найдено тел, кристаллизующихся в формах, к ней принадлежащих.

3) Фиг. 48 соответствует ромбоэдрической гемиэдрии. Общая форма есть гексагональный скаленоэдр [50]. Совместимо равны шесть направлений, из которых три совмещаются при поворотах на 120° около оси в 120°, а три других расположены симметрично с первыми относительно осей в 180°; симметрично равны этим шести направлениям другие шесть, прямо им противоположные. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к парам граней, лежащих у попеременных средних ребер скаленоэдра, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням этой формы.

4) Фиг. 51 соответствует пирамидальной гемиэдрии. Общая форма есть гексагональная пирамида третьего рода [51]. Совместимо равны шесть направлений, совмещающихся при последовательных поворотах на 60° около оси в 60°, и симметрично им равны шесть других направлений, расположенных симметрично первым относительно плоскости симметрии. Первые расположены как перпендикуляры к граням общей формы, сходящимся к одному из концов оси в 60°, а симметрично им равные — как перпендикуляры к граням, сходящимся к другому концу оси в 60°.

5) Фиг. 49 соответствует тригонотипной гемиэдрии. Общая форма есть дитригональная пирамида [52]. Совместимо равны шесть направлений, из которых три совмещаются при поворотах на 120°, а прочие три расположены симметрично с первыми относительно осей в 180°; симметрично им равны другие шесть направлений, расположенных симметрично с первыми относительно одной из плоскостей симметрии.

Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным плоскостям основной формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням этой формы. Эта гемиэдрия приводится у Наумана, хотя представителей в природе для нее не найдено.

6) Фиг. 56 соответствует ромбоэдрической тетартоэдрии. Общая форма есть ромбоэдр (третьего рода) [53]. Совместимо равны три направления, совмещающиеся при поворотах на 120° около оси в 120°, а симметрично им равны три направления, прямо противоположные первым. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к трем граням общей формы, сходящимся к одному концу оси в 120°, а симметрично им равные — как перпендикуляры к трем граням, сходящимся к другому концу оси в 120°.

7) Фиг. 47 соответствует трапецоэдрической или тригонотипной тетартоэдрии. Общая форма есть тригональный трапецоэдр [54]. Совместимо равны шесть направлений, из которых три совмещаются при поворотах на 120° около оси в 120° и другие три расположены симметрично с первыми относительно осей в 180°. Направления эти расположены как перпендикуляры к граням основной формы. Симметрично равных направлений нет.

8) Фиг. 54 представляет тетартоэдрию, которую мы можем называть пирамидальною. Общая форма есть тригональная пирамида [55], которую можно называть тригональною пирамидою третьего рода. Совместимо равны три направления, совмещающиеся при поворотах около оси в 250° на 120°, и симметрично им равны три других направления, расположенные симметрично с первыми относительно плоскости симметрии. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к граням основной формы, сходящимся у одного из концов оси в 120°, между тем как симметрично равные им направления расположены как перпендикуляры к граням, сходящимся у другого конца оси в 120°. В природе эта тетартоэдрия представителей не имеет,

у Наумана она также не приводится. Причина, отчего она у него не явилась, очевидна из следующих его слов:[1] „Так же, как при гемиэдрии, *кажется*, и при тетартоэдрии следует рассматривать расчленение, упомянутое в начале § 121, таким образом, что из каждой группы четырех граней, соответствующих одному секстанту основания, одна остается, между тем как другие три исчезают. Но при этом *предположении* возможны только два вида тетартоэдрии". Заключение это весьма верно, но мы оспариваем предположение, на котором оно основано; пирамидальная тетартоэдрия получается, если сохранить по две грани, везде правые или везде левые, в *попеременных* секстантах. Мы не можем вполне понять, отчего Науман счел нужным непременно сохранять, по крайней мере, по одной плоскости в каждом секстанте. Кажется, что симметрия гексагональной системы (понимая это слово так, как его употребляет Науман) не страдает оттого, если пропустить попеременные секстанты, потому что в таком случае из четырех секстантов, прилегающих к каждой из побочных осей, мы пропускаем два, и у всех побочных осей мы делаем то же самое. Надобно, наконец, помнить, что для данного кристаллического ряда во всех гексагональных формах мы можем совершенно произвольно выбирать между двумя системами побочных осей, из которых оси одной системы разделяют пополам углы между осями другой системы. Что же нас заставляет в формах тригонотипной гемиэдрии и трапецоэдрической тетартоэдрии выбрать именно ту систему осей, при которой будет справедливо упомянутое выше предположение Наумана? Если выбрать другую систему осей, то получаются другие секстанты, которые точно так же, как и первые, должны быть подвержены правилам гексагональной симметрии; но между тем тогда, для получения упомянутых видов гемиэдрии и тетартоэдрии приходится пропустить все грани

[1] Naumann. Elemente der theoretischen Krystallographie. 1856, стр. 215.

попеременных секстантов. О характере форм вновь установленной здесь тетартоэдрии мы скажем подробнее в гл. VI.

9) Фиг. 52 соответствует гемиморфии голоэдрических форм. Общая форма есть половина дигексагональной пирамиды [56], в которой сохранены все грани, сходящиеся к одному из концов оси в 60°. Совместимо равны шесть направлений, совмещающихся при последовательных поворотах на 60° около оси в 60°, симметрично им равны шесть направлений, расположенных симметрично первым относительно плоскостей симметрии. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням общей формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням. В этой гемиморфии кристаллизуется гренокит.

10) Фиг. 50 соответствует гемиморфии трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии. Общая форма есть половина гексагональной пирамиды (третьего рода) [57], в которой сохранены все грани, сходящиеся к одному из концов оси в 60°. Совместимо равны шесть направлений, совмещающихся при последовательных поворотах на 60° около оси в 60°. Направления эти расположены как перпендикуляры к граням основной формы. Симметрично равных направлений вовсе нет; гемиморфия эта не имеет представителей в природе и Науманом не упоминается.

11) Фиг. 55 соответствует гемиморфии ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдрии [58]. Общая форма есть половина скаленоэдра или тригонотипной пирамиды, в которых сохранены все грани, сходящиеся к одному из концов оси в 120°. Совместимо равны три направления, совмещающиеся при поворотах около оси в 120° на 120°, и симметрично им равны направления, расположенные симметрично первым относительно плоскостей симметрии. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням общей формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням этой формы.

12) Фиг. 53 соответствует гемиморфии всех тетартоэдрий. Общая форма есть половина тригональной пирамиды (третьего рода) [59], в которой сохранены три грани, сходящиеся к одному из концов оси в 120°. Совместимо равны три направления, совмещающиеся при поворотах на 120° около оси в 120°. Направления эти расположены как перпендикуляры к граням основной формы. Симметрично равных направлений вовсе не имеется. Гемиморфия эта представителей в природе не имеет, и Науманом она не приводится.

Г. Ромбическая система

1) Фиг. 39 соответствует голоэдрическим формам. Общая форма есть ромбический октаэдр [60]. Совместимо равных направлений четыре, расположенных симметрично относительно осей в 180°; симметрично им равны четыре других направления, им прямо противоположные. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням основной формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням.

2) Фиг. 38 соответствует сфеноидальной гемиэдрии. Общая форма есть ромбический сфеноид [61]. Совместимо равны те же направления, как и в голоэдрии. Симметрично равных же вовсе нет. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к граням основной формы.

3) Фиг. 43 соответствует гемиморфии голоэдрических форм. Общая форма есть половина ромбического октаэдра [62], в которой сохранены те грани, которые сходятся к одному концу одной из осей в 180°. Совместимо равны два направления, расположенные симметрично относительно оси в 180°, и симметрично им равны два других направления, расположенных симметрично первым относительно плоскостей симметрии. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к попеременным граням общей формы, а симметрично им равные — как перпендикуляры к остальным граням.

Примечание. Науман причисляет к ромбической системе еще следующие две группы:

1) Мероэдрия с моноклиноэдрическим характером форм. Эта мероэдрия, по-нашему, есть не что иное, как голоэдрия моноклиноэдрической системы. Главными представителями этой группы Науман считает датолит и вольфрам. Что касается до датолита, то принадлежность его к моноклиноэдрической системе сделана вероятною уже по измерениям углов, произведенным Шредером (Pogg. Ann., т. 94, стр. 235) и Даубером (Pogg. Ann., т. 103, стр. 116), и воззрение это подтверждено оптическими исследованиями Деклуазо (Manuel de minéralogie, т. I, стр. 170). Что же касается до вольфрама, то некоторые кристаллографы и теперь уже относят его к моноклиноэдрической системе, но так как этот минерал непрозрачен, то, вероятно, долго придется ждать подтверждения этого воззрения из исследования физических свойств сего минерала. К этой группе причислялись также прозопит и красное синильное кали, которые, однако, по оптическим исследованиям Деклуазо оказались принадлежащими: первый к триклиномерной, а второй к моноклиномерной системе. Различными авторами причислялись сюда еще и кристаллы следующих тел: калиевая слюда, тенорит, виннокислый аммиачный стронций, хлористое железо, между тем как некоторые из этих тел другими авторами относятся к моноклиноэдрической системе. Пока мы не будем иметь более точных измерений углов или пока принадлежность их к моноклиноэдрической системе не будет доказана по оптическим их свойствам, до тех пор мы не будем иметь опытного решения этого вопроса. Мы, впрочем, здесь уже заметим, что если даже в этих формах оказались три действительно взаимно перпендикулярных пояса, то мы этого не считаем нисколько доказательством принадлежности их к ромбической системе; доводы

наши по этому предмету будут ясно выражены в нижеследующих главах.

Мы должны здесь сказать несколько слов о гармотоме, который Деклуазо (Manuel de minéralogie, т. I, стр. 413) причисляет к ромбической системе, приписывая формам его гемиэдрию моноклиноэдрическую. По нашему мнению, существует гораздо более основания причислить кристаллы гармотома к моноклиноэдрической системе, принимая ортодиагональ перпендикулярною к граням *p*. Грани $b^{\frac{1}{2}}$ будут тогда полупирамидой, и грани *m* — две полуортодомы, через что объяснятся также гемиэдрические свойства этих граней. Если принять в расчет, что в этом минерале не найдено трех взаимно перпендикулярных пинакоидов или поясов и что, значит, принадлежность кристаллов к ромбической системе основывается единственно на возможности отнесения форм к трем прямоугольным осям, и если притом еще брать в расчет, что углы кристаллов этого минерала до сих пор не могли быть измерены с большою точностью, то оказывается, что доводы, по которым они причислены к ромбической системе, довольно шатки. Замечательно, что именно для этого минерала оказывается недействительным то средство, которое при других обстоятельствах могло бы служить для решения о принадлежности его к той или другой системе; рассеяние оптических осей вовсе не могло быть открыто в этом минерале.[1]

[1] По словесному сообщению г-ну Деклуазо вышеизложенного результата, он исследовал вновь оптические свойства гармотома и нашел в оптических осях его несомненные признаки повороченной дисперсии, ясно доказывающей принадлежность этого минерала к моноклиноэдрической системе. Подобная гемиэдрия, встреченная также на кристаллах велерита, причисляемых также к ромбической системе, заставила Деклуазо исследовать вновь оптические свойства и этого минерала, причем найдено, что также и его формы принадлежат к моноклиноэдрической системе.

2) Гемиморфия сфеноидальной гемиэдрии. К этой группе можно было бы причислить: виннокислое кали, виннокислое аммиачное кали, яблочнокислый аммиак и молочный сахар. В первом из этих тел открыты даже полярные электрические явления. Надобно заметить, впрочем, что за большую точность измерений, сделанных над этими телами, ручаться нельзя; мы полагаем, что те из них, в которых гемиморфизм не есть случайность, надобно причислить к гемиморфизму моноклиноэдрической системы.

Д. Моноклиноэдрическая система

1) Фиг. 42 соответствует голоэдрии. Общая форма есть моноклиноэдрическая полупирамида [63]. Совместимо равны два направления, симметрично расположенные относительно оси в 180°, а им симметрично равны направления, им прямо противоположные. Совместимо равные направления расположены как перпендикуляры к двум граням, сходящимся к одному концу оси в 180° (или ортодиагонали), а симметрично равные им направления — как перпендикуляры к двум другим граням.

2) Фиг. 46 соответствует гемиэдрии. Общая форма есть половина полупирамиды, в которой сохранены две грани, симметрично расположенные относительно плоскости симметрии [64]. Симметрично равны два направления, симметрично расположенные относительно плоскости симметрии, т. е. таким же образом, как перпендикуляры к граням общей формы. Совместимо равных направлений вовсе нет. Гемиэдрия эта представителей в природе не имеет, и у Наумана она не приводится.

3) Фиг. 41 соответствует гемиморфии. Общая форма есть половина полупирамиды, в которой сохранены две грани, сходящиеся к одному из концов оси в 180° [65] (или ортодиагонали). Совместимо равны два направления, симметрично расположенные относительно оси в 180°; таким же образом

расположены и перпендикуляры к граням основной формы. Симметрично равных направлений вовсе нет.

Примечание. Науман (Elem. d. theoret. Kryst., стр. 325) выражается, как будто бы гемиэдрия, замеченная Пастером, происходила по другому закону, нежели гемиморфия, замечаемая, например, на тростниковом сахаре. Мы, однако, не можем видеть, в чем состоит различие гемиморфии от гемиэдрии Пастера. Пастер не рассматривает как необходимость одновременное существование всех плоскостей его так называемого тетраэдра (сфеноида), он приводит много примеров, в которых существуют всего две плоскости одного из тетраэдров, и, наконец, в одном месте он выражается об этом предмете довольно определительно, говоря: „il suffirait de l'existence de l'un ou de l'autre de ces couples de faces pour qu'il y eût hémièdrie non superposable“ [[66]] (Ann. de chim. et de phys., III ser., т. 38, стр. 448).

E. Триклиноэдрическая система

1) Фиг. 57 соответствует голоэдрии. Общая форма состоит из двух параллельных плоскостей [[67]]. Симметрично равны два направления, прямо противоположные, т. е. расположенные как перпендикуляры к граням основной формы. Совместимо равных направлений вовсе нет.

2) Фиг. 58 соответствует гемиэдрии. Общая форма есть одна отдельная грань [[68]]. Равных направлений вовсе нет. Гемиэдрия эта у Наумана не упоминается. Между тем существует тело, кристаллы которого, по всей вероятности, надобно причислить к этой группе; это есть кислый виннокислый стронций, описанный Скакки (Pogg. Ann., т. 109, стр. 313). Из граней этих кристаллов три хотя и встречаются вместе с своими параллельными, но они отличаются от параллельных им способом нарастания на них других кристаллов или кривизною, происходящею от такого нарастания,

или же тем, что некоторыми из этих граней кристаллы сами нарастают, другими же нет. Прочие же пять граней или во всех замеченных случаях, или же только при известных обстоятельствах являются без параллельных им.

Примечание. Многие авторы признают существование еще седьмой кристаллической системы, так называемой диклиноэдрической. Система эта была основана Митчерлихом в 1826 г. при описании форм серноватистокислой извести. Характеристика ее состоит в том, что две из координатных плоскостей образуют между собой прямой угол и что призмы, параллельные оси, направленной по прямой пересечения этих плоскостей, являются с полным числом своих граней; во всем же прочем система эта имеет характер триклиноэдрический. В 1862 г., однако, Цефарович исследовал вновь кристаллы серноватистокислой извести (Sitzungsbericht der Math. Naturw. Classe der Acad. der Wiss. in Wien, т. 45, стр. 499) и нашел, что форма ее триклиноэдрическая как потому, что угол между координатными плоскостями отличается от прямого на 12′20″, так и потому, что упомянутая выше призма не постоянно встречается с полным числом граней и одна пара параллельных граней ее постоянно более развита и более блестяща, нежели другая. Грани, найденные на кристаллах, исследованных Цефаровичем (всего 15 пар), те же самые, как и на кристаллах, описанных Митчерлихом, кроме одной, которая Цефаровичем не была найдена. Многие углы также одинаковы с точностью до 1′ и 2′, но в других есть разности, доходящие в одном случае до 56′. Цефарович не считает себя, однако, вправе сомневаться в верности измерений, сделанных Митчерлихом, и останавливается на предположении, что соль, исследованная Митчерлихом, не совершенно одинакова с тою, которую он сам исследовал. Нельзя, однако, не сознаться в том, что после исследования Цефаровича является некоторое сомнение в том, прав ли был Митчерлих, осно-

вывая новую кристаллическую систему на особенностях в форме серноватистокислой извести. После исследования Митчерлиха были зачислены в диклиноэдрическую систему еще и формы некоторых других тел, а именно: хлорнокислый цинконин в 1849 г. (Dauber, Ann. der Chemie und Pharm., т. 71, стр. 66), салициловокислая окись цинка в 1858 г. (Grailich, Krystallographisch-Optische Untersuchungen, стр. 185), троякованадиевокислый стронций в 1859 г. (Handl, Sitzungsbericht der Acad. der Wiss. in Wien, т. 38, стр. 391) и куминовая кислота в 1862 г. (Schabus, Pogg. Ann., т. 116, стр. 412). О принадлежности к этой системе хлорнокислого цинконина Даубер заключает, видно, потому только, что существует плоскость (которая вместе с тем есть плоскость спайности), которая прямо притупляет острые ребра ромбической призмы; между тем, если принять в расчет, что плоскости, названные Даубером двоякокосыми конечными плоскостями, на обоих концах призмы одинаково наклонны как к правым, так и к левым граням призмы у тупого угла последней, то из этого следует, что в рассматриваемой форме существует ось совмещения в 180°, перпендикулярная к плоскости спайности, и что кристаллы эти следует причислить к гемиморфии моноклиноэдрической системы. Что касается салициловокислой окиси цинка, то единственное основание, на котором Грайлих полагает, что можно было бы кристаллы ее причислить к диклиноэдрической системе, состоит в том, что две из граней ее оказались взаимно перпендикулярными; призмы же, параллельной ребру между этими гранями, вовсе нет. Такое данное могло бы заслуживать некоторое внимание только в таком случае, если бы углы были измерены с большой точностью, чего нет причины предполагать, так как Грайлих говорит, что кристаллы были почти микроскопичны, и так как для одного из измеренных углов приводятся две величины, отличающиеся друг от друга на 11′. На каком же осно-

вании Гандль мог причислить кристаллы трояккованадиевокислого стронциана к диклиноэдрической системе, это для нас совершенно непонятно. В своей статье он не приводит никаких данных относительно осей, кроме того, что говорит в одном месте, что оси двух поясов (параллельные двум из кристаллографических осей) перпендикулярны друг к другу. Если же по вычисленным углам определить, к каким осям грани были отнесены для сделанного им вычисления, то окажутся углы между плоскостями осей $A=88°3'$, $B=84°59'$, $C=89°50'$ [углы между осями: $(bc)=88°4'$, $(ac)=84°59'$, $(ab)=90°$, размеры осей $c=1$, $\lg a=0.60311-1$, $\lg b=0.69083-1$]. Хотя один из углов между плоскостями осей отличается от прямого только на $10'$, но такую разность нельзя приписать ошибке, потому что если одновременно и этот угол и один угол между осями будут прямые, то непременно одна из плоскостей осей будет перпендикулярна к двум другим (как в моноклиноэдрической системе), а такому положению совершенно противоречат данные Гандлем знаки граней и углы между ними. Кроме того, что нет прямого угла между плоскостями осей, также и призма, параллельная оси C, является только двумя параллельными гранями. Что же касается, наконец, до куминовой кислоты, то Шабус считает вероятным, что кристаллы ее принадлежат к диклиноэдрической системе на том основании, что на этих кристаллах найдены два пинакоида, образующие между собой прямой угол. Между тем не доказано, что угол этот прямой; Шабус сам говорит, что вследствие несовершенства плоскостей одного из этих пинакоидов углы между ними и другими плоскостями не могли быть точно измерены и для вышеупомянутого угла, который Шабус считает прямым, были найдены при измерениях величины, заключающиеся между $89°15'$ и $90°20'$. К этому надо, кроме того, заметить, что открыты были две полупризмы, параллельные прямой пересечения упомя-

нутых двух пинакоидов, но каждая из этих полупризм является только двумя параллельными гранями.

Итак, мы видели, что в настоящее время нам не известно ни одного тела, кристаллы которого можно было бы с достоверностью причислить к диклиноэдрической системе. Мы идем далее и говорим, что если бы даже существовали тела, в кристаллических формах которых были бы выполнены все условия, требуемые для диклиноэдрической системы, то для них все-таки не следует образовать особенной системы; дальнейшие объяснения по этому вопросу мы, однако, отложим до последней нашей главы. Но мы не можем не прибавить уже здесь, что эти замечания, сделанные нами относительно диклиноэдрической системы, с таким же правом распространяются одинаково и на все подразделения систем, принятые различными кристаллографами, но не входящие в число установленных нами 32 кристаллографических групп. Ни одного также нет тела, кристаллы которого можно было бы положительно причислить к одному из названных подразделений, правильность установления которых мы бы оспаривали даже и тогда, если бы были открыты кристаллы, обладающие всеми признаками, характеризующими эти подразделения систем.

Глава V

О РАСПОЛОЖЕНИИ И РАВЕНСТВЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ОСЕЙ [69]

§ 21. Нам остается решить довольно важный вопрос относительно тождественности форм, произведенных по данным выше правилам совмещения и симметрии, с теми формами, которые производятся по методу, принятому до сих пор в кристаллографии. Этот метод, как известно, состоит в том, что задают известные системы осей, с известными свойствами, и затем выводят кристаллические формы, полагая

в основание эти заданные свойства осей. Нетрудно убедиться в том, что в формах, произведенных по сему последнему методу, будут существовать те же самые оси совмещения, плоскости симметрии и пр., посредством которых мы характеризовали каждую из исчисленных выше кристаллографических групп. Надобно, однако, посмотреть, будут ли и обратно во всех формах, повинующихся установленным нами законам симметрии и совмещения, существовать, с приписываемыми свойствами, те кристаллографические оси, которые по второму методу полагаются в основание при выводе кристаллических форм. При этом разборе окажется, что, действительно, в некоторых группах не существуют по необходимости оси с предполагаемыми для них свойствами и что, значит, употребленный до сих пор в кристаллографии метод заключает в себе скрытое предположение, исключающее возможность некоторых форм. Необходимо в точности выставить на вид это предположение и разобрать, какие мы можем иметь доводы для его допущения.

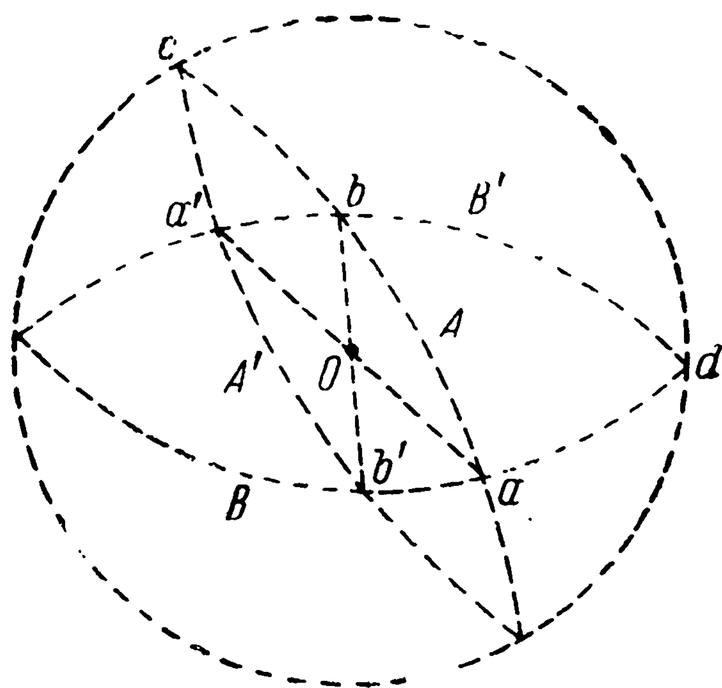
§ 22. Докажем сначала, что *ось совмещения в 180°, 90° или 60° вместе с тем непременно будет возможной кристаллографической осью* [70].

Возможная кристаллографическая ось, наклонная к оси совмещения, после поворота на 180° совмещается с прямой, которая, очевидно, также будет возможной кристаллографической осью. Эта ось вместе с первой осью и с осью совмещения будет находиться в одной плоскости, которая будет кристаллографически возможная плоскость. Другая кристаллографическая ось, наклонная к оси совмещения и не лежащая в вышеупомянутой плоскости, даст нам, таким же образом, другую кристаллографически возможную плоскость, проходящую также через ось совмещения, которая как пересечение двух возможных плоскостей должна быть возможною кристаллографическою осью. Это доказательство, однако, не полно, пока мы не доказали существования двух осей, наклонных к оси совмещения и не находящихся с ней

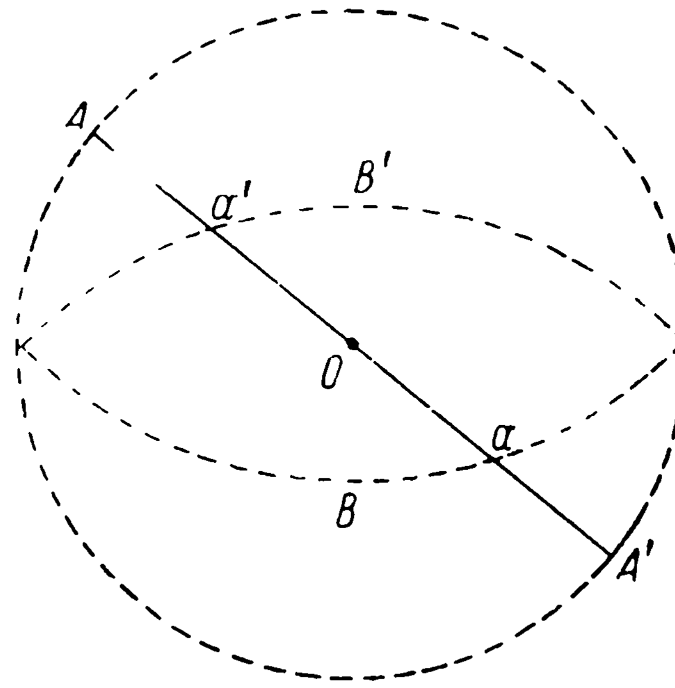
в одной плоскости. Вот почему мы должны вопрос этот разобрать подробнее.

Для того чтобы закон рационального отношения между параметрами имел смысл, необходимо, чтобы существовали, по крайней мере, три грани, не параллельные одной общей прямой. Если через какую-нибудь точку проведем три плоскости, параллельные этим граням, то пересечение этих плоскостей будет иметь место по трем прямым, не лежащим в одной плоскости. Если через эту же точку проведем прямую, параллельную оси в 180°, 90° или 60°, и если одно из пересечений плоскостей совпадает с этой осью, то она будет возможной кристаллографической осью. Если же такого совпадения не будет, так как все три пересечения не могут совпасть с плоскостью, перпендикулярной к оси в 180°, 90° или 60°, то непременно одно из них будет иметь положение, наклонное к этой оси. Пусть A и B (фиг. 18) будут такие две плоскости, пересечение которых a наклонно к оси совмещения O. При повороте около оси O на 180° плоскости A и B совпадут с плоскостями A' и B', которые поэтому также возможны и которые пересекутся по той прямой a', с которой совпадает прямая a при повороте около оси O на 180°. Я говорю, что прямая пересечения b плоскостей A и B' не будет перпендикулярна в оси O. В самом деле, в этом случае прямая b сливалась бы с прямыми пересечения c и d плоскостей A и B' с плоскостью, перпендикулярной к оси O, и все четыре плоскости A, B, A' и B' имели бы общую прямую пересечения b перпендикулярной к оси O, что противоречит заданию. При повороте на 180° около оси O прямая b сливается с прямой пересечения b' плоскостей A' и B. Плоскость, проходящая через a и a', так же как и плоскость, проходящая через b и b', обе кристаллографически возможны, так как каждая из них проходит через две возможные кристаллографические оси. Если обе эти плоскости не совпадают, то прямая их пересечения, которая есть ось O, будет кристаллографической осью.

Если же прямые b и b' падают в одной плоскости с a и a', то прямые b и b' должны совпасть с прямыми a и a', потому что без этого плоскости A и B совпали бы, что противоречило бы заданию. Если же прямые b и b' совпадают с прямыми a и a', то одна из плоскостей A или B проходит через ось совмещения O (фиг. 19). Я говорю, что в этом случае должна существовать еще кроме плоскостей A, B и B' одна возможная плоскость, проходящая или через ось совмещения, или к ней наклонная. В самом деле, для



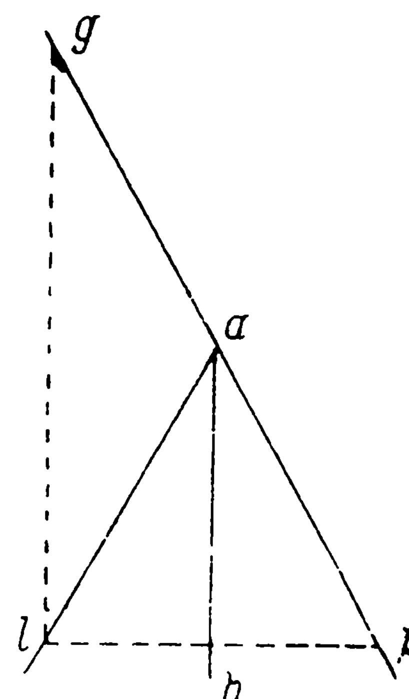
Фиг. 18.



Фиг. 19.

того чтобы закон рационального отношения между параметрами имел смысл, должны существовать кроме трех граней, не параллельных одной и той же прямой, еще две грани, не параллельные ни одной из прочих четырех граней. Если одна из этих двух граней перпендикулярна к оси совмещения, то другая C уже не может быть перпендикулярна к этой прямой и должна: 1) или проходить через нее, не совпадая, однако, с плоскостью A, или 2) пересекать ось O под углом косым, не совпадая ни с гранью B, ни с B'. В первом случае ось совмещения будет возможная кристаллографическая ось, так как через нее проходят две возможные плоскости, плоскость A и еще другая плоскость C. Во

втором случае мы будем иметь две грани B и C, наклонные к оси совмещения под косым углом и не сливающиеся при повороте одной из них около оси совмещения на 180°. Если общее пересечение этих граней есть прямая, также наклонная к оси совмещения, то, согласно доказанному выше, эта ось есть кристаллографическая ось. Если же во всем кристаллическом ряду нет двух граней, наклонных к оси совмещения и пересекающихся по прямой, также наклонной к этой оси, то эта ось может и не быть кристаллографической осью. В этом случае возможны только следующие грани: 1) две грани, параллельные между собой и параллельные оси совмещения; 2) неограниченное число граней, все параллельные одной и той же прямой, перпендикулярной к оси совмещения. Такую ось совмещения в 180°, которая не есть возможная кристаллографическая ось, мы будем называть иррациональной осью в 180°.



Фиг. 20.

При иррациональной оси в 180° грань, перпендикулярная к ней, невозможна. В самом деле, пусть (фиг. 20) плоскость бумаги будет возможная грань, проходящая через ось в 180° ah; пусть далее al и ap будут пересечения с этой плоскостью двух соответствующих граней, наклонных к оси совмещения. Эти две грани пересекаются между собою по некоторой прямой, перпендикулярной к оси совмещения и лежащей вне плоскости бумаги; прямую эту будем называть aA. Прямые ap и al, образующие с осью совмещения равные углы, будут возможными кристаллографическими осями. Условие возможности различных граней заключается в том, чтобы эти грани были параллельны прямой aA и при том имели бы такое положение, что если через любую точку l, взятую на кристаллографической оси al, проведем плоскости, им параллельные, то параметры этих плоскостей по оси ap

будут находиться в рациональных отношениях между собой. Заметим, что грань, перпендикулярная к оси совмещения, имеет по ap параметр $ap = al$, в то время когда грань, параллельная aA и оси совмещения, будет иметь по этой же оси параметр $ag = -al$, так что возможность грани, перпендикулярной к оси совмещения, влечет за собою возможность также грани, параллельной оси совмещения и отличной от грани, заключающейся в плоскости бумаги. В этом случае ось совмещения как пересечение двух возможных граней будет вместе с тем и кристаллографической осью.

Только что рассмотренный случай, что ось совмещения не есть кристаллографическая ось, не может иметь места при оси в 90° и в 60°, потому что, при этих осях, какой-нибудь грани, проходящей через ось совмещения, соответствует другая, проходящая через эту ось, пересекающаяся с первой по оси совмещения под углом в 90° или в 60°, и что в этом случае ось совмещения как пересечение двух возможных граней будет кристаллографической осью.

§ 23. Докажем теперь, *что всегда возможна грань, перпендикулярная к оси в 90° или в 60°, а также и к рациональной оси в 180°* [71].

Заметим, что пересечение двух граней, сливающихся при повороте около данной оси на 180°, имеет место по прямой, перпендикулярной к этой оси. Вследствие этого пересечение какой-нибудь возможной кристаллической плоскости, наклонной к оси совмещения, с плоскостью, перпендикулярной к этой оси, непременно есть возможная кристаллографическая ось. Поэтому, если при оси в 60°, 90° или 180° будут две возможные грани, наклонные к этой оси и пересекающиеся с плоскостью, перпендикулярной к этой оси по различным прямым, то плоскость, через них проведенная, перпендикулярная к оси совмещения, будет кристаллографически возможная плоскость. Остается разобрать, будут ли всегда существовать две такие возможные грани. Припомним, что должны существовать, по крайней мере, три грани, не парал-

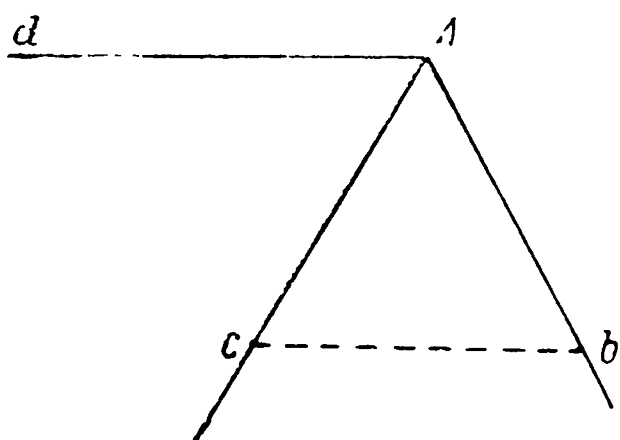
лельные одной общей прямой, так что должна существовать, по крайней мере, одна грань, не параллельная оси совмещения. Если же грань не перпендикулярна к этой оси (что удовлетворило бы нашим требованиям), то она должна быть наклонна к ней. При оси в 60° и 90° эта грань наклонная и та, с которою она совмещается при повороте около оси совмещения на 60° или 90°, пересекаются с плоскостью, перпендикулярною к этой оси по различным прямым, и требования наши будут удовлетворены. При оси же в 180° возможно следующее совокупление граней: 1) неограниченное число граней, параллельных одной и той же прямой, перпендикулярной к оси совмещения, и 2) одна пара граней, параллельных оси совмещения. Пусть (фиг. 20) ah будет ось совмещения, al и ap — пересечения двух соответствующих граней с возможною плоскостью, проходящей через ось совмещения, то al и ap будут возможными кристаллографическими осями. Если ось совмещения есть возможная кристаллографическая ось, то возможна еще и плоскость, проходящая через прямую ah и общую прямую пересечения плоскостей, наклонных к оси совмещения. Если через произвольную точку l на прямой al провести плоскость, параллельную этой последней плоскости, то параметр ее по оси ap будет $ag = -al$. Так как поэтому отношения между двумя параметрами по двум осям al и ap рациональны, то возможна плоскость, имеющая параметры al и $ap = al$ и параллельная общей прямой пересечения плоскостей, наклонных к оси совмещения. Но эта последняя прямая, так же как и lp, перпендикулярна к оси совмещения, а потому и возможная плоскость, им параллельная, также перпендикулярна к оси совмещения.

В случае иррациональной оси в 180°, мы уже видели в предыдущем, что грань, к ней перпендикулярная, — невозможна.

§ 24. *При оси совмещения в 90° или в 60°, а также и при рациональной оси в 180°, две кристаллографические оси,*

которые совмещаются при повороте около оси совмещения на 180°, равномерны.[1]

Пусть *ah* (фиг. 20) будет ось совмещения в 180°, 90° или 60° и *al* — возможная кристаллографическая ось; очевидно, прямая *ap*, с которой *al* совмещается при повороте около *ah* на 180°, также будет возможной кристаллографической осью. Так как *ah* тоже есть кристаллографическая ось, то будет возможна какая-нибудь плоскость, пересекающаяся с плоскостью чертежа по прямой *ah*; параметры *al* и *ag* этой плоскости по двум осям *al* и *ap* равны, откуда и следует равномерность осей *al* и *ap*.



Фиг. 21.

§ 25. *Непременно существует возможная кристаллографическая ось, перпендикулярная к оси совмещения в 60° или 90°, и прямая, с которой она совмещается при повороте около оси совмещения на 60° и 90°, будет непременно кристаллографической осью, равномерной с первой.*

Мы уже видели, что при оси в 60° или 90° непременно возможна плоскость, перпендикулярная к этой оси; какая-нибудь другая возможная плоскость пересекается с первой по прямой, которая и будет поэтому кристаллографической осью. При повороте на 60° или 90° эта ось совмещается с прямой, которая также будет кристаллографической осью, потому что она есть пересечение двух возможных плоскостей; остается доказать, что эти две оси равномерны. Пусть *A* (фиг. 21) будет ось совмещения, перпендикулярная к плоскости чертежа, *Ab* — первая кристаллографическая ось и *Ac* — вторая, с которой она совмещается при повороте около *A* на 60° или 90°. Если ось совмещения *A* будет в 60°, то дока-

[1] Мы называем *равномерными* две кристаллографические оси, если параметры по одной из этих осей находятся в рациональном отношении к параметрам по другой оси.

зательство нашей теоремы не встречает затруднения, потому что тогда будет также кристаллографической осью прямая *Ad*, с которой совмещается *Ac* при повороте на 60° в ту же сторону, в которую надобно поворачивать кристалл для совмещения *Ab* с *Ac*. Вследствие этого будет возможна плоскость, проходящая через ось совмещения *A* и прямую *Ad*; но параметры этой плоскости по двум осям *Ab* и *Ac* будут равны, чем и доказывается равномерность этих осей.

При оси в 90° теорема относительно равномерности совмещающихся осей будет по необходимости справедлива только тогда, если существует хоть одна грань, наклонная к этой оси. Припомним, что ось совмещения *A* сама есть кристаллографическая ось, и через любую точку, взятую на ней, проведем эту наклонную грань и другую, с которой первая совмещается при повороте около оси совмещения на 90°. Первая из этих граней пересекается непременно с одной из прямых *Ab* или *Ac*, другая плоскость, с которой первая совмещается, пересекается с другой осью в том же расстоянии от точки *A*, откуда и следует равномерность двух осей *Ab* и *Ac*.

§ 26. Если при оси совмещения в 90° не будет ни одной грани, наклонной к этой оси, то будут возможны только грани, параллельные этой оси, и пара граней, к ней перпендикулярная. Все кристаллографические оси заключаются в одной плоскости, перпендикулярной к оси совмещения, по оси же совмещения будут возможны только два параметра, один — бесконечность, а другой — произвольная величина. При иррациональной оси в 180° мы таким же образом имеем только один пояс граней и пару граней, пересекающих ось этого пояса. Все кристаллографические оси будут также в плоскости, параллельной этой паре граней, и лежащая вне этой плоскости ось пояса будет кристаллографической осью только в таком отношении, что по ней возможны всего два параметра: бесконечность и произвольная величина. Кроме этих двух случаев, выказавшихся при наших рассуждениях

в предыдущих параграфах как исключения от общих свойств осей в 180° и 90°, можно вообразить и другие случаи, определяемые вообще тем, что кроме осей, лежащих в одной плоскости, существует одна лишь ось, не лежащая в этой плоскости и по которой мы допускаем только два параметра: один — бесконечность и другой — произвольный. Так, например, при осях в 180°, 60° и 120° мы можем себе вообразить пояс, параллельный этой оси, и одну грань, перпендикулярную к этой оси; при трех взаимно перпендикулярных осях в 180° мы можем себе представить пояс, параллельный одной из этих осей, и пару граней, параллельных двум другим осям в 180°, и наконец, при отсутствии оси совмещения, мы можем себе представить пояс граней, параллельных произвольной прямой, и произвольную пару граней, пересекающих эту прямую. Во всех этих случаях закон рационального отношения между параметрами применяется не вполне, потому что нет трех осей, не лежащих в одной плоскости и по которым все параметры граней находились бы в рациональных отношениях к какому-нибудь основному параметру, так как по оси, не лежащей в одной плоскости с прочими, основного параметра нет. Ни один из этих случаев в природе не имеет места, из чего мы заключаем, что всегда существуют три оси, по которым хоть один параметр имеет определенную величину, отличную от нуля и бесконечности. Так как плоскость, проведенная через концы этих параметров, возможна, то этот закон, обнимающий все кристаллические формы, можно выразить и таким образом: *во всяком кристаллическом ряду существуют четыре грани, параллельные граням трехсторонней пирамиды.*

§ 27. По установлении изложенного в предыдущем параграфе начала, замеченные нами отступления от теории §§ 22, 23, 24 и 25 исчезают, и мы должны вообще заключить:

1) что *всякая ось совмещения в 180° или 60° вместе с тем есть возможная кристаллографическая ось;*

2) что *две возможные кристаллографические оси, совмещающиеся при повороте на 180° около оси совмещения в 180°, равномерны между собой;*

3) что *всегда возможна грань, перпендикулярная к оси совмещения в 180°, 90° или 60°, и*

4) что *существует непременно возможная кристаллографическая ось, перпендикулярная к оси совмещения в 60° или 90°, и прямая, с которой она сливается при повороте около оси совмещения на 60° или 90°, есть также возможная кристаллографическая ось, равномерная с нею.*

§ 28. Оси в 120° имеют свойства, отличные от других осей совмещения в том отношении, что не будут непременно кристаллографическими осями. Для разбора этих свойств вообразим плоскость, наклонную к оси совмещения в 120°, и другие две плоскости, с которыми первая совмещается при поворотах около оси совмещения на 120°. Прямые пересечения этих трех плоскостей будут кристаллографическими осями, которые образуют равные углы между собой и одинаково наклонены к оси в 120°; назовем эти оси через A, B и C. Пусть будет грань, которая по этим осям имеет параметры a, b и c. После поворота на 120° эта плоскость будет иметь по осям A, B и C параметры b, c и a, и после второго поворота на 120° в ту же сторону — параметры c, a и b. Последние две плоскости переместим параллельно самим себе так, чтобы все три плоскости имели по оси A один и тот же параметр a. При перемещении плоскости параллельно самой себе все параметры ее изменяются в одинаковой пропорции. Таким образом, при упомянутом перемещении параметры второй и третьей плоскостей изменяются в пропорциях $\frac{a}{b}$ и $\frac{a}{c}$. Итак, после перемещения, параметры наших плоскостей будут:

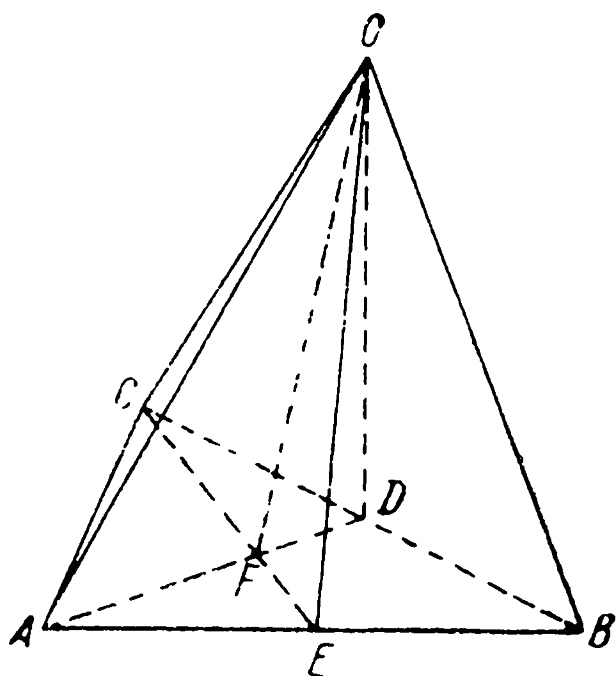
$$\text{по оси } A\colon\ a,\ a,\ a;$$
$$\text{по оси } B\colon\ b,\ \frac{ac}{b},\ \frac{a^2}{c};$$
$$\text{по оси } C\colon\ c,\ \frac{a^2}{b},\ \frac{ab}{c}.$$

Возможность существования этих плоскостей обусловливается рациональностью отношений параметров их по одной и той же оси; т. е. рациональностью отношений $\frac{b^2}{ac}$, $\frac{a^2}{bc}$ и $\frac{c^2}{ab}$. Отсюда следует рациональность отношения $\frac{a^3}{b^3}$; положим $\frac{a^3}{b^3}$ и $\frac{b^2}{ac}$ равными произвольным рациональным величинам ρ и ρ_1:

$$\frac{a^3}{b^3}=\rho, \quad \frac{b^2}{ac}=\rho_1,$$

мы имеем

$$\frac{a}{b}=\sqrt[3]{\rho}\,, \quad \frac{b}{c}=\rho_1\sqrt[3]{\rho}\,, \quad \frac{a}{c}=\rho_1\sqrt[3]{\rho^2}\,.$$



Фиг. 22.

§ 29. Мы рассмотрим теперь два случая: первый, когда ρ есть единица или куб рационального числа, и второй, когда ρ не есть куб рационального числа. В первом случае отношение между a, b и c рационально и мы можем принять основные параметры по трем осям A, B и C равными. Я говорю, что *в этом случае ось в 120° есть кристаллографическая ось*. Вследствие равенства параметров по осям OA, OB и OC (фиг. 22) возможна плоскость ABC, которая по трем осям имеет равные параметры OA, OB и OC; но в таком случае мы можем за оси координат принять BA, BO и BC, и основные параметры по этим осям будут BA, BO и BC. Из этого очевидно, что возможны плоскости AOD и COE, имеющие параметры по этим осям, первая BA, BO и $\frac{1}{2}$ BC, а вторая BC, CO и $\frac{1}{2}$ BA. Эти две плоскости пересекаются по оси в 120°, которая поэтому есть кристаллографическая ось. Заметим здесь также, что пересечение этих плоскостей с плоскостью, перпендикулярной к оси в 120°, происходит

по двум прямым, пересекающимся под углом в 60°, и что эти две прямые суть кристаллографические оси. Далее, так как пересечение F — оси совмещения с плоскостью CAB — есть центр равностороннего треугольника ACB, то $FD = FE$, так что две оси FE и FD равномерны; им же равномерна еще третья ось, проведенная через точки B и F и пересекающая первые две под углом в 60°.

Докажем также и обратное предположение, что *если ось в 120° есть возможная кристаллографическая ось, то три совмещающиеся оси A, B и C равномерны.* В самом деле, вообразим кристаллическую плоскость, пересекающую ось в какой-нибудь точке, отличной от начала координат. При вращении на 120° в ту или другую сторону эта плоскость совмещается с другими плоскостями, которые проходят через ту же точку на оси в 120°. Но так как ось в 120° есть в то же время и кристаллографическая ось, то последние две плоскости имеют по осям B и C параметры, одинаковые с параметром первой плоскости по оси A, из чего следует равномерность осей A, B и C.

§ 30. Из вышесказанного само собой следует, что если ρ не есть куб рационального числа, т. е. если совмещающиеся оси неравномерны, то ось в 120° не есть возможная кристаллографическая ось [72]. Столь же очевидна справедливость и обратного предложения. В природе подобные оси в 120° не встречаются или, по крайней мере, еще не были найдены. Мы заметим также, что *при них закон рационального отношения тангенсов углов между гранями одного пояса не может иметь места.* В самом деле, для существования этого закона требуется, чтобы находились в рациональных отношениях произведения, составленные из двух основных параметров на синусы углов, которые они образуют с третьей осью, и на косинус угла между координатными плоскостями у третьей оси. Так как углы между совмещающимися осями равны и углы между плоскостями, проходящими через эти оси, также равны, то отношение между двумя вышеупомянутыми

произведениями приводится к отношению между двумя основными параметрами, которое, как мы выше видели, не есть рациональное.

§ 31. Рассмотрим теперь отдельно каждую из кристаллографических групп, исчисленных в IV главе, чтобы решить, существуют ли в этих группах возможные кристаллографические оси такие, какие обыкновенно принимают в кристаллографии.

А. Группы правильной системы

1 и 2) (Фиг. 28 и 27). В этих группах, соответствующих голоэдрии и попеременно-плоскостной гемиэдрии, существуют три взаимно перпендикулярные оси совмещения в 90°; они же суть возможные кристаллографические оси и притом равномерные, согласно § 27, пункты 1 и 4.

3) (Фиг. 31). В этой группе, соответствующей тетраэдрической гемиэдрии, перпендикуляры к плоскостям симметрии разделяют пополам углы между осями в 180° [73]. Перпендикуляры эти, вследствие замечания, сделанного в § 13 в отношении абсолютной величины параметров, играют ту же роль, как оси в 180°. Вследствие этого существующие в этой группе оси в 180°, которые вместе с тем суть кристаллографические оси, равномерны между собой, как оси, совмещающиеся при повороте на 180° около перпендикуляров к плоскостям симметрии (§ 27, пункт 2).

4 и 5) (Фиг. 30 и 29). В этих двух группах, соответствующих додекаэдрической гемиэдрии и тетартоэдрии, существуют три взаимно перпендикулярные кристаллографические оси, совпадающие с осями совмещения в 180°, но эти оси будут равномерны только в таком случае, если оси в 120° также суть кристаллографические оси (§ 29).

В этом случае группы эти по свойствам своим совершенно совпадают с группами, описанными в кристаллографиях под названием додекаэдрической гемиэдрии и тетартоэдрии. В случае же, если оси в 120° не суть кристаллографические оси [74],

то основные параметры по трем взаимно перпендикулярным кристаллографическим осям находятся в иррациональных между собой отношениях. В этом случае, кроме общих форм этих групп, возможны только пентагональные додекаэдры и куб, прочие же формы, в которых параметры по двум осям равны, невозможны (см. § 30).

Б. Группы квадратной системы

1 и 2) (Фиг. 33 и 32). В группах этих, соответствующих голоэдрии и трапецоэдрической гемиэдрии, ось в 90°, а также и перпендикулярные к ней оси в 180° суть кристаллографические оси; из сих последних оси взаимно перпендикулярные равномерны между собой (§ 27, пункты 1 и 4).

3) (Фиг. 40). В этой группе, соответствующей сфеноидальной гемиэдрии, три оси в 180° [75] будут тремя взаимно перпендикулярными кристаллографическими осями, из которых две равномерны, потому что углы между ними разделяются пополам перпендикулярами к плоскостям симметрии, которые, как мы заметили выше, имеют некоторые свойства осей в 180° (§ 27, пункты 1 и 2).

4 и 7) (Фиг. 36 и 35). В этих группах, соответствующих пирамидальной гемиэдрии и ее гемиморфии, ось в 90° есть кристаллографическая ось, и согласно § 27, пункт 4, перпендикулярно к ней существуют две взаимно перпендикулярные и равномерные оси, которые могут быть выбраны параллельно горизонтальным ребрам любой из квадратных пирамид или же по прямым, разделяющим пополам углы между этими ребрами. В первом случае выбранная пирамида будет второго рода и во втором случае — первого рода.

5) (Фиг. 34). В общей форме этой группы, соответствующей сфеноидальной тетартоэдрии, существуют четыре грани, параллельные четырем граням квадратной пирамиды, так что ось сфеноидальной симметрии в отношении к абсолютной величине параметров будет иметь одинаковые свойства с осью совмещения в 90°. Итак, ось сфеноидальной симметрии есть

кристаллографическая ось и к ней перпендикулярны две другие оси, взаимно перпендикулярные и равномерные между собой. Эти последние оси могут быть выбраны или параллельно пересечениям граней какого-нибудь сфеноида с плоскостью, перпендикулярной к оси сфеноидальной симметрии, или же по прямым, разделяющим пополам углы между этими пересечениями. В первом случае выбранный сфеноид будет второго рода и во втором случае — первого рода.

6) (Фиг. 37). В группе этой, соответствующей гемиморфии голоэдрических форм, ось совмещения есть кристаллографическая ось, к которой будут перпендикулярны четыре другие оси (перпендикуляры к плоскостям симметрии), из которых взаимно перпендикулярные равномерны между собой.

В. Группы гексагональной системы

1, 2, 4, 9 и 10) (Фиг. 45, 44, 51, 52 и 50). В этих группах, соответствующих голоэдрии, трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии и гемиморфиям голоэдрии и трапецоэдрической или пирамидальной гемиэдрии, ось совмещения в 60° есть кристаллографическая ось, к которой перпендикулярны три другие оси, пересекающиеся под углом в 60° и равномерные между собою (§ 27, пункты 1 и 4). Для того чтобы побочные оси были расположены так, как их принимает Науман, надобно в первых двух группах принимать эти оси по переменным осям совмещения в 180°, в гемиморфии голоэдрической по попеременным перпендикулярам к плоскостям симметрии, а в пирамидальной гемиэдрии и ее гемиморфии параллельно или перпендикулярно сторонам основания какой-нибудь гексагональной пирамиды; в первом случае пирамида эта будет первого рода, а во втором случае — второго рода.

3, 5 и 7) (Фиг. 48, 49 и 47). В группах этих, соответствующих ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдриям и трапецоэдрической тетартоэдрии, плоскость, проходящая через

оси в 180°, кристаллографически возможна (§ 27, пункт 1), и так как эта плоскость перпендикулярна к оси совмещения в 120°, то эта ось будет кристаллографической осью (§ 29), причем кристаллографические оси, направленные по осям в 180°, равномерны между собой.

11) (Фиг. 55). По сходству в свойствах перпендикуляров к плоскостям симметрии с осями совмещения в 180°, сказанное о трех последних группах применяется и к этой группе, соответствующей гемиморфии ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдрии.

8) (Фиг. 54). В группе этой, соответствующей пирамидальной тетартоэдрии, перпендикуляр к плоскости совпадает с осью в 120°; но так как перпендикуляр к плоскости симметрии вследствие сходства, которое он имеет с осью в 180°, есть кристаллографическая ось, то здесь ось в 120° есть кристаллографическая ось, и вследствие § 29 существуют три оси, к ней перпендикулярные, пересекающиеся под углами в 60° и равномерные между собой, причем, если оси эти будут выбраны так, как мы это делали в § 29, т. е. перпендикулярно к пересечениям граней какой-нибудь тригональной пирамиды с плоскостью, перпендикулярной к оси в 120°, то пирамида эта будет второго рода.

6 и 12) (Фиг. 56 и 53). В группах этих, соответствующих ромбоэдрической тетартоэдрии и гемиморфии тетартоэдрической, ось в 120° не есть по необходимости кристаллографическая ось [76], так что в этих двух группах не существует по необходимости система осей, характеристическая для гексагональной системы. Если ось совмещения в 120° есть кристаллографическая ось, то эта система осей будет существовать, и в этом случае рассматриваемые группы совершенно тождественны с ромбоэдрической тетартоэдрией и гемиморфией тетартоэдрий гексагональной системы. Если же ось в 120° не есть кристаллографическая ось, то и не будет осей, к ней перпендикулярных, невозможны призмы и пинакоид [77], так что единственная возможная форма есть ром-

боэдр или в гемиморфии полуромбоэдр, и притом, при данном ромбоэдре, дополнительный ему невозможен.

Г. Группы ромбической системы

1, 2 и 3) (Фиг. 39, 38 и 43). В первых двух группах, соответствующих голоэдрии и сфеноидальной гемиэдрии, оси совмещения в 180°, а в третьей группе, представляющей гемиморфию голоэдрическую, кроме того, еще перпендикуляры к плоскостям симметрии суть кристаллографические оси, взаимно перпендикулярные. Вообще оси эти неравномерны, но случайно они могут быть и равномерны [78].

Д. Группы моноклиноэдрической системы

1, 2 и 3) (Фиг. 42, 46 и 41). В этих группах, соответствующих голоэдрии, гемиэдрии и гемиморфии, ось в 180° или перпендикуляр к плоскости симметрии есть одна кристаллографическая ось (ортодиагональ), и так как всегда возможна плоскость, к ней перпендикулярная (§ 27, пункт 3), то другие кристаллографические оси определяются двумя какими-нибудь пересечениями с нею других кристаллических граней. Таким образом, последние две оси (главная ось и клинодиагональ) перпендикулярны к первой оси (ортодиагонали), между тем как они между собой образуют угол, который может быть и косой и прямой [79].

Е. Группы триклиноэдрической системы

1 и 2) (Фиг. 57 и 58). В этих группах, соответствующих голоэдрии и гемиэдрии, кристаллографическими осями будут три пересечения каких-нибудь кристаллографических граней, не параллельных одной прямой. Две из плоскостей, проходящих через эти оси, могут быть между собой перпендикулярны, две из осей могут быть перпендикулярны к третьей, или же, наконец, все три оси перпендикулярны между собой [80].

Известно, что если закон рационального отношения тангенсов углов между гранями одного и того же пояса имеет всеобщее применение, то во всяком триклиномерном ряду можно выбрать оси так, чтобы они представили любой из исчисленных выше случаев перпендикулярности.

§ 32. Таким образом мы видели, что вообще во всех кристаллографических группах, нами установленных, существуют по необходимости возможные кристаллографические оси, таким же образом расположенные и в тех же случаях равномерные, как это вообще принимается в кристаллографии, в шести кристаллографических системах. Исключения из этого делают только некоторые из тех групп, в которых встречаются оси в 120° [81], а именно: додекаэдрическая гемиэдрия (фиг. 30) и тетартоэдрия (фиг. 29) правильной системы и ромбоэдрическая тетартоэдрия (фиг. 56) и гемиморфия тетартоэдрий (фиг. 53) гексагональной системы. В этих группах будут существовать оси, одинаковые с осями прочих групп тех систем, к которым они принадлежат, только в таком случае, если оси в 120° суть возможные кристаллографические оси, что имеет место всегда, если справедлив закон рационального отношения тангенсов углов между гранями одного и того же пояса. Если же оси в 120° не суть кристаллографические оси, то в двух группах правильной системы хотя и будут существовать три взаимно перпендикулярные оси, но отношения между параметрами по ним будут иррациональны; в двух же группах гексагональной системы обыкновенное расположение осей этой системы (так, как оно принимается у Наумана) вовсе не имеет места, между тем, как существуют три оси, направленные, как оси ромбоэдрической системы Миллера, но основные параметры по ним опять-таки находятся в иррациональных отношениях.

Вышеуказанное отсутствие в природе форм, характеризуемых осями в 120°, которые не суть кристаллографические оси, кажется, должно служить одним из самых сильных доводов в пользу всеобщей справедливости закона рациональности

отношения тангенсов углов между гранями одного и того же пояса. В самом деле, без этого, какие мы имеем средства для проверки справедливости этого закона? Средства эти состоят только в том, чтобы поверять, действительно ли всегда тангенсы известных измеренных углов находятся в отношении, которое можно представить дробью, в которой числитель и знаменатель выражаются числами не очень большими. Такая поверка только тогда позволяет нам вывести заключение, в высшей степени вероятное, о справедливости поверяемого закона, если бы в огромном большинстве случаев получались весьма простые дроби, выражающие отношения между тангенсами измеренных углов, с точностью, падающей внутри пределов возможных погрешностей, зависящих от неточности измерений. Для отношений между параметрами граней по кристаллографическим осям такая простота дробей действительно имеет место, и потому этот закон и мог быть основательно поверен этим путем. Дроби же, выражающие отношение между тангенсами, выходят гораздо более сложными, и нетрудно убедиться в том, что так и должно быть, даже если упомянутый выше закон абсолютно справедлив. Вот что значительно затрудняет поверку этого закона. Те же самые замечания касаются и до другого способа, заключающегося в том, чтобы поверять на числах, удовлетворяют ли размеры осей и углы между ними тем условиям, которые необходимо должны существовать для возможности вышеозначенного закона. Здесь, конечно, нельзя предвидеть á priori, что должны получиться числа, выраженные довольно сложными дробями, но между тем во многих случаях получаются именно такие числа; кроме того, затруднительна при этом способе оценка погрешностей, зависящих от неточности наблюдений. Вот почему весьма важно иметь поверку этого закона независимо от измерений углов. Эта поверка заключается, как мы выше могли заметить, в том:

1) что мы не знаем ни одного тела, кристаллизующегося в додекаэдрической гемиэдрии правильной системы, в котором

не встречаются октаэдр, ромбический додекаэдр, трапецоэдр или пирамидальный октаэдр;

2) что единственное тело, кристаллизующееся, сколько известно, в тетартоэдрии правильной системы, представляет грани тетраэдра и ромбического додекаэдра;

3) что во всех телах, кристаллизующихся в ромбоэдрической тетартоэдрии гексагональной системы, существуют или пинакоиды или призмы.

Если закон рациональности отношения между тангенсами углов между гранями одного и того же пояса не имел бы общего применения, то *весьма вероятно*, что в числе тел, кристаллизующихся в приведенных выше группах, были и такие, на которых бы не встречались никогда те простые формы, которые возможны при таких осях в 120°, которые не суть вместе с тем кристаллографические оси.

Глава VI

ОПИСАНИЕ НЕКОТОРЫХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ГРУПП

§ 33. В IV главе мы сделали обзор установленных нами кристаллографических групп. В этой главе мы войдем в ближайшее рассмотрение некоторых из них, которые прежде нигде не были рассмотрены подробнее. Для лучшей связи в этой же главе мы рассмотрим все вообще группы, называемые гемиморфическими. Полагая, что лучшее средство для обзора форм гемиэдрических, гемиморфных и тетартоэдрических состоит в том, чтобы показать, каким образом эти формы можно производить из форм других групп, преимуществено голоэдрических, мы ниже укажем на отношение простых форм рассматриваемых групп к соответствующим формам голоэдрическим.

Б. Квадратная система

6) (Фиг. 37). *Гемиморфия голоэдрических форм.* Из простых форм голоэдрических все пирамиды и пинакоиды сохра-

няют только половинное число своих граней, а именно те, которые сходятся к одному какому-нибудь концу главной оси. Все призмы голоэдрические остаются с полным числом своих граней.

7) (Фиг. 35). *Гемиморфия пирамидальной или трапецоидальной гемиэдрии* получается, если в дитетрагональной пирамиде предыдущей гемиморфии пропустим попеременные грани или же в формах пирамидальной и трапецоэдрической гемиэдрии пропустим грани, пересекающиеся с одним каким-нибудь концом главной оси. Через это дитетрагональная пирамида обращается в квадратную полупирамиду третьего рода, квадратные пирамиды первого и второго рода обращаются в квадратные полупирамиды первого и второго рода, пинакоид — в полупинакоид, дитетрагональная призма — в тетрагональную призму третьего рода, призмы же первого и второго рода остаются без изменения.

B. Гексагональная система

8) (Фиг. 54). *Пирамидальная тетартоэдрия*. Формы этой тетартоэдрии получаются, если в дигексагональной пирамиде[82] мы сохраним одни только правые или одни только левые грани в попеременных секстантах, пропуская вовсе грани прочих секстантов. По этому правилу дигексагональная пирамида распадается на четыре тригональные пирамиды третьего рода, гексагональная пирамида первого рода распадается на две тригональные пирамиды первого рода, гексагональная пирамида второго рода — на две тригональные пирамиды второго рода, дигексагональная призма — на четыре тригональные призмы третьего рода, гексагональная призма первого рода — на две тригональные призмы первого рода и гексагональная призма второго рода — на две тригональные призмы второго рода, между тем как пинакоид остается без изменения. Итак, в этой тетартоэдрии все пирамиды и призмы тригональны.

9) (Фиг. 52). *Гемиморфия голоэдрических форм* совершенно соответствует подобной же гемиморфии квадратной системы, так что будем иметь дигексагональные полупирамиды, гексагональные полупирамиды первого и второго рода и полупинакоид, причем все призмы остаются с полным числом граней.

10) (Фиг. 50). *Гемиморфия трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии* совершенно соответствует подобной же гемиморфии в квадратной системе, так что будем иметь гексагональные полупирамиды и гексагональные призмы первого, второго и третьего рода и полупинакоид.

11) (Фиг. 55). *Гемиморфия ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдрии* получается пропусканием в каждой простой форме соответствующих гемиэдрий, граней, пересекающихся с одним из концов главной оси. Таким образом из форм ромбоэдрической гемиэдрии скаленоэдр обращается в дитригональную полупирамиду, ромбоэдр — в тригональную полупирамиду первого рода, гексагональная пирамида второго рода — в гексагональную полупирамиду второго рода, пинакоид — в полупинакоид, дигексагональная призма — в дитригональную призму, гексагональная призма первого рода — в тригональную призму первого рода, между тем как гексагональная призма второго рода остается без изменения. Для сохранения названий пирамидам и призмам первого и второго рода такими, как мы их привели, надобно при переходе от тригонотипной гемиэдрии к ее гемиморфии принять оси, промежуточные между осями, принимаемыми для этой гемиэдрии Науманом.

12) (Фиг. 53). *Гемиморфия тетартоэдрии.* Формы ее получаются из форм ромбоэдрической или пирамидальной тетартоэдрии, пропуская грани, пересекающие один из концов главной оси. Таким образом из форм ромбоэдрической тетартоэдрии ромбоэдры первого, второго и третьего рода обращаются в тригональные полупирамиды первого, второго и третьего рода, пинакоид — в полупинакоид, между тем как

гексагональные призмы первого, второго и третьего рода обращаются в тригональные призмы первого, второго и третьего рода.

Г. Ромбическая система

3) (Фиг. 43). *Гемиморфия голоэдрических форм.* Простые формы этой гемиморфии получаются из голоэдрических пропусканием граней, пересекающих один из концов одной из осей, одной и той же для всех форм. Если ось эту примем за главную, то будем иметь формы следующих названий: ромбическая полупирамида, главная ромбическая призма, полумакродома и полубрахидома, главный полупинакоид, макропинакоид и ортопинакоид.

Д. Моноклиноэдрическая система

2) (Фиг. 46). *Гемиэдрия.* В голоэдрической полупирамиде сохранена пара граней, пересекающихся с клинодиагональным сечением по одной общей прямой, так что полупирамида обращается в четверть пирамиды. По тому же закону главная призма и клинодома обращаются в полупризму и полудому, полуортодома — в четверть ортодомы, главный пинакоид и ортопинакоид — в полупинакоиды, между тем как клинопинакоид остается без изменения.

3) (Фиг. 41). *Гемиморфия.* Из четырех граней голоэдрической полупирамиды пропущены две, пересекающиеся с одним из концов ортодиагонали (или оси в 180°). Таким образом полупирамида обращается в четверть пирамиды, главная призма — в полупризму, клинодома — в полуклинодому, полуортодома, главный пинакоид и ортопинакоид остаются без изменения, между тем как клинопинакоид обращается в полуклинопинакоид.

Е. Триклиноэдрическая система

2) (Фиг. 58). *Гемиэдрия.* В голоэдрии все простые формы имеют по одной только паре граней, которые между собой

параллельны; гемиэдрические формы получаются пропусканием одной из этих граней в каждой простой форме.

Глава VII

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В естественных науках всякая классификация делается с той целью, чтобы по возможности облегчить обзор частных свойств предметов, ею обнимаемых. Надобно признать лучшей ту классификацию, в которой каждая отдельная группа составлена из таких предметов, которые имеют наивозможно большее число сходных свойств. Нам кажется, что в этом отношении предложенная в этой статье классификация кристаллов представляет некоторое преимущество перед теми способами группировки их, которые до сих пор служили в кристаллографии. Мы признаем отдельными группами только такие, которые числом и расположением равных направлений отличаются от других групп, и если справедливо общее начало, что направления, одинаково расположенные относительно граней наружной формы, вместе с тем и обладают одинаковыми физическими свойствами, между тем как по направлениям, неодинаково расположенным относительно наружной формы, могут проявляться физические свойства различные, тогда наша классификация будет столько же физической, сколько геометрической. Нам также кажется, что выражение того начала, которое мы положили в основание нашей классификации и на которое мы только что указали в немногих словах, не заключает в себе ничего неопределительного и неточного, и что подробности этой классификации суть не что иное, как необходимые последствия, полученные путем чисто механического вывода из этого начала в совокупности с законом рационального отношения между параметрами. Я должен даже признать, что труд мой по этому предмету есть не что иное, как результат той вну-

тренней борьбы, в которой с первого шага моих занятий я постоянно находился, борьбы против неопределительности тех понятий, которые я мог извлечь из различных сочинений касательно начал, положенных в основание для сгруппирования кристаллов в системы и подразделения сих последних на более тесные группы.[1]

Исследования наши привели к результату, несколько различному от классификации, ныне общепринятой в кристаллографии. Так, сравнительно с группами, приведенными Науманом, мы указываем на возможность семи новых групп, а именно: двух гемиморфий квадратной системы, пирамидальной тетартоэдрии и гемиморфий пирамидальной гемиэдрии и тетартоэдрий гексагональной системы, симметрической гемиэдрии моноклиноэдрической и гемиэдрии триклиноэдрической системы, между тем как мы отвергаем существование в виде отдельных групп следующих семи: гемиэдрии и тетартоэдрии ромботипных, гемиморфии сфеноидальной гемиэдрии и мероэдрии с моноклиноэдрическим характером квадратной системы, мероэдрии с моноклиноэдрическим характером и гемиморфии сфеноидальной гемиэдрии ромбической системы и всей системы диклиноэдрической.

Основания, по которым мы считаем себя вправе установить только что исчисленные новые группы, уже достаточно были выяснены в этой статье; что же касается до семи групп, существование которых мы отвергаем, то мы считаем уместным здесь еще прибавить некоторые замечания. Уже из того обстоятельства, что группы эти не вошли отдельными группами в нашу классификацию, видно, что числом и расположением равных направлений они не отличаются от других групп, нами установленных. Остается за этим разобрать,

[1] Я считаю своей обязанностью объявить здесь, что первым побуждением к предпринятию настоящей работы служило замечание, сделанное о плоскостях симметрии бывшим моим учеником Г. Н. Феодоровым, ныне заведующим химической лабораторией Михайловской артиллерийской Академии.

в чем состоят те особенности, которыми отличаются эти группы от тех групп, к которым, по нашему мнению, следовало бы их присоединить. После того надобно решить, достаточно ли важны эти особенности для того, чтобы группы эти считать самостоятельными, с отнесением их к другим кристаллографическим системам, нежели к каким они, по нашему мнению, принадлежат. С этой целью мы разберем каждую группу отдельно.

Ромботипная гемиэдрия квадратной системы отличается от голоэдрии ромбической системы только тем, что основные параметры по двум из взаимно перпендикулярных кристаллографических осей равны между собою или находятся в простом рациональном отношении. Спрашивается, в чем заключается важность подобного обстоятельства, если с ним не связаны какие-нибудь другие свойства кристаллов? Между рассматриваемой группой и голоэдрией ромбической системы нет различия в законе расположения граней, и так как число и расположение равных направлений в обеих группах то же самое, то нет причины ожидать различия в характере физических свойств. Если притом нет опыта, который указал бы на такое различие в физических свойствах, то спрашивается, что же у нас остается, чтобы оправдать причисление этой группы к квадратной системе? Если допустить причисление к ромбической системе форм, в которых отношение между параметрами по двум из осей может быть до крайности разнообразно, отчего непременно делать исключение для простого рационального отношения? И что такое, наконец, *простое* рациональное отношение, — разве можно дать этому понятию точное определение?

Все, что мы сказали по сравнению этой гемиэдрии с голоэдрией ромбической системы, применяется также слово в слово к сравнению ромботипной тетартоэдрии квадратной системы с сфеноидальной гемиэдрией ромбической системы, от которой она не отличается ни законом расположения граней, ни числом и расположением равных направлений. Те же самые

замечания применяются также и к сравнению гемиморфии сфеноидальной гемиэдрии квадратной системы с гемиморфией голоэдрических форм ромбической системы, с единственной только разницей, что для того, чтобы получить оси ромбической системы, надобно вместо двух побочных осей, принятых Науманом, принять две другие, разделяющие пополам углы между первыми осями. Что же касается до мероэдрии квадратной системы, которую Г. Г. Розе считал себя вправе установить на основании своих измерений кристаллов сульфаминового аммония, то мы уже выше заметили, что измерения эти не были в такой степени точны, чтобы не могло остаться сомнения относительно того, действительно ли в форме этих кристаллов существуют те особенности, которые считались достаточными для причисления их к квадратной системе. По нашему мнению, эти кристаллы представляют комбинацию $oP, +P, (P\infty)$ моноклиноэдрической системы, к которой их следует причислить даже и тогда, если действительно главная ось была бы перпендикулярна к клинодиагонали и, кроме того, основные параметры по клинодиагонали и по ортодиагонали были бы равны. Мы знаем, что все моноклиноэдрические формы могут быть отнесены к прямоугольным осям (это то, что делал Вейс и что всегда может быть сделано, коль скоро справедлив закон рациональности отношений тангенсов углов между гранями одного и того же пояса); если вообще при прямоугольных осях координат знаки граней выходят более сложными, чем при известной системе косоугольных осей, мы не видим причины, отчего в частном случае эти знаки не могут выходить простейшими для данной системы осей прямоугольных. Если значение в 90° угла между двумя осями не связано с какими-либо другими свойствами кристаллов, то мы не видим, чем такое значение более замечательно, нежели всякое другое частное значение этого угла. Что же касается до равенства основных параметров по двум осям, нам остается только припомнить то, что мы сказали выше по этому поводу при рассматривании других групп

квадратной системы, существование которых мы оспариваем. Моноклиноэдрическая гемиэдрия ромбической системы не должна, по-нашему, составить группы отдельной от голоэдрии моноклиноэдрической системы даже и в том случае, если кристаллы, к ней причисляемые, представили бы пинакоид, действительно перпендикулярный к ребрам вертикальной призмы; по изложенным выше причинам мы не можем смотреть на величину этого угла в 90° иначе как на частный случай, которому не следует приписать особенной важности. То же самое замечание применяется также и к гемиморфии сфеноидальной гемиэдрии ромбической системы, которой, по нашему мнению, не следует отделять от гемиморфии моноклиноэдрической системы.

В примечании, сделанном в конце IV главы, мы старались показать, что довольно сомнительно существование кристаллов, действительно обладающих теми признаками, которые считаются характеристическими для диклиноэдрической системы. Но, допустив даже, что существуют подобные кристаллы, мы все-таки должны отвергать существование диклиноэдрической системы как отдельной группы и причислить формы, сюда относящиеся, к голоэдрии триклиноэдрической системы. Отличие от сей последней заключается только в перпендикулярности двух из плоскостей осей и в том, что призма, грани которой параллельны пересечению этих плоскостей, является всегда всеми своими четырьмя гранями вместе.

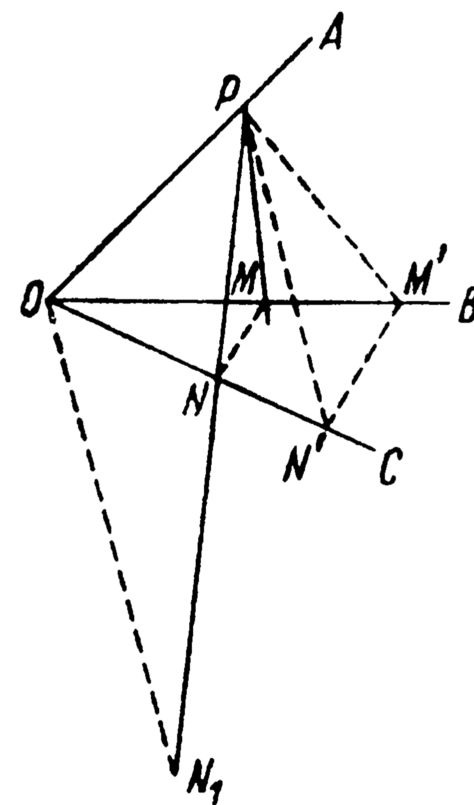
Что касается до перпендикулярности плоскостей, все, что мы сказали в этой главе о перпендикулярности осей, применяется и здесь. Мы бы не были вправе сказать этого, если действительно с этой перпендикулярностью было бы связано проявление призмы с полным числом граней. Мы, однако, никогда не были в состоянии понимать, чтобы такое проявление призмы было следствием перпендикулярности двух из плоскостей осей. Плоскости эти разделяют пространство на четыре части, равные по объему, равные относительно рас-

положенных в них углов между гранями этой призмы и двумя взаимно перпендикулярными плоскостями осей; между тем как эти пространства не равны относительно расположенных в них углов между этими же гранями призмы и третьей плоскостью координат и во всех других отношениях. Но если и проявление призмы всеми своими четырьмя гранями вместе не может быть выведено à priori из того, что угол между двумя из плоскостей осей есть прямой, то все-таки одновременное существование этих двух признаков могло бы быть обусловлено законом природы. Из данных, сообщенных нами в примечании, помещенном в конце гл. IV, однако видно, что принятие этого закона не может быть оправдано, потому что на одном единственном примере нельзя основать закона, тем менее, что и этот пример несколько сомнителен. В самом деле, из всех кристаллов, причисляемых к диклиноэдрической системе, призма является с полным числом своих граней в одной только соли, первоначально исследованной Митчерлихом, соли, которая впоследствии не могла быть воспроизведена с теми свойствами, которые ей приписывает Митчерлих. Наконец, мы должны заметить, что постоянное проявление в одной какой-нибудь соли призмы, со всеми своими четырьмя гранями вместе, не представило бы ничего удивительного, в особенности, когда соль эта добывается одними только известными путями и при известных обстоятельствах. Таких примеров более или менее постоянного сочетания известных простых форм мы знаем несколько. Кому не известно, в какой степени редко в кварце встретить ромбоэдр без дополнительного ему и без граней призмы первого рода; между тем число кристаллов кварца, попавших в руки кристаллографов и минералогов, несравненно более значительно, и обстоятельства, под которыми эти кристаллы образовались, несравненно более разнообразны, чем это имеет место для химического продукта не совсем обыкновенного, как сульфаминовый аммоний.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Закон рационального отношения между параметрами кристаллических граней

Как известно, закон этот состоит в том, что возможно выбрать три оси координат, не лежащие в одной плоскости, такие, что если провести плоскости, параллельные граням какого-нибудь кристаллического ряда через произвольную точку, взятую на одной из осей координат, или через точки пересечения одной из сих плоскостей с другой осью координат, то параметры всех этих плоскостей по каждой из осей координат находятся между собой в рациональных отношениях [83]. Мы будем называть *возможной* кристаллической плоскостью данного ряда такую плоскость, параметры которой, находясь в рациональном отношении к параметрам прочих плоскостей по всем трем осям координат, удовлетворяют вышеизложенному закону.



Фиг. 23.

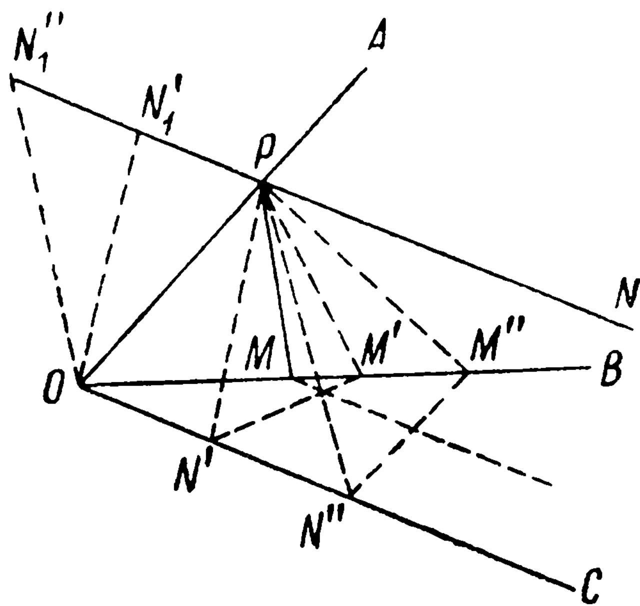
Я говорю, что этот самый закон будет удовлетворен для данного кристаллического ряда даже и тогда, когда взамен первоначальных плоскостей координат мы возьмем какие-нибудь три возможные кристаллические плоскости, и что прежние плоскости координат суть также возможные кристаллические плоскости. В самом деле, пусть OA, OB и OC (фиг. 23) будут три оси координат, относительно которых закон рационального отношения между параметрами удовлетворен. Докажем сначала, что одну из плоскостей координат, например BOC, можно заменить любой плоскостью кристаллического ряда. Положим сначала, что эта плоскость PMN не параллельна оси OC, так что она пересекается с ней в точке N. Новые

оси координат будут PO, PN и PM. Через точку O проведем плоскость, параллельную любой из прочих плоскостей кристаллографического ряда, например плоскости $PN'M'$. Пересечение этой плоскости с плоскостью OPN имеет место по прямой ON_1, параллельной PN'; вследствие этого треугольники PNN' и ONN_1 подобны, и мы имеем

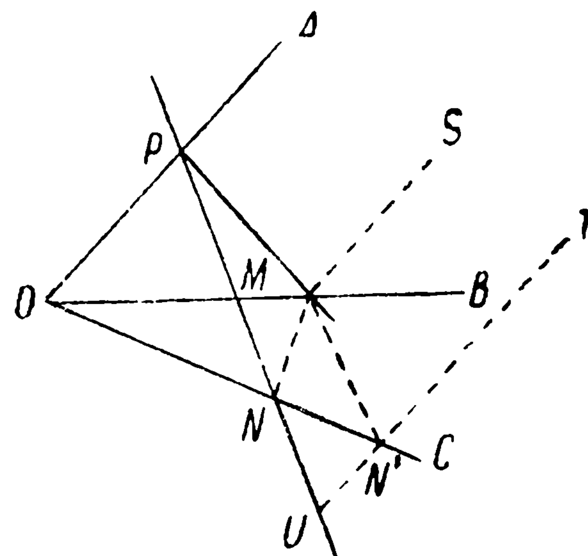
$$NN_1 : PN = ON : NN'.$$

Так как второе отношение (отношение параметра к разности двух параметров по оси OC) рационально, то и первое отношение рационально, из чего следует, что отношение параметра по оси PN какой-нибудь кристаллической плоскости к параметру по этой же оси прежней плоскости координат есть рациональное число. Если же новая плоскость координат PNM параллельна оси OC (фиг. 24), то одна из новых осей координат PN параллельна прежней OC и параметр плоскости BOC по этой оси будет бесконечность. Нетрудно в этом случае доказать, что параметры по оси PN каких-нибудь двух кристаллических плоскостей, не параллельных этой оси, находятся между собой в рациональных отношениях. В самом деле, пусть будут две плоскости $PN'M'$ и $PN''M''$, параметры которых ON' и ON'' по оси OC находятся в рациональном отношении. Для получения параметров их по оси PN проведем через точку O две прямые: ON_1' и ON_1'', параллельные PN' и PN'', пересечения этих прямых с осью PN в точках N_1' и N_1'' определят параметры PN_1' и PN_1'' по оси PN плоскостей, параллельных $PN'M'$ и $PN''M''$, и так как эти параметры по абсолютной величине равны параметрам ON' и ON'' по оси OC, то они находятся в рациональных отношениях. Итак, мы доказали, что во всех случаях параметры всех кристаллографически возможных плоскостей, а также и старой плоскости координат по оси PN находятся в рациональных отношениях между собой. Таким же порядком можно доказать, что то же самое

имеет место и по оси PM, так что закон рационального отношения между параметрами будет справедлив и для новых осей PO, PN и PM. В вышеприведенном доказательстве мы определили положение плоскостей относительно новых осей координат тем, что через произвольную точку O, взятую на одной из осей, мы провели плоскости, им параллельные, которые пересечением своим с двумя другими осями координат PN и PM определили параметры плоскостей по этим осям. Этот способ не годится для определения положения плоскостей, параллельных оси PO, возможность которых при старых осях



Фиг. 24.



Фиг. 25.

определяется таким образом, что через точку пересечения M (фиг. 25) какой-нибудь другой плоскости с осью OB мы приводим плоскость $SMN'T$, параллельную рассматриваемой, причем параметр ON' этой плоскости по оси OC должен находиться в рациональном отношении к какому-нибудь другому параметру ON по этой оси. Таким же образом мы должны также поверять, будет ли закон рационального отношения между параметрами удовлетворен для этой плоскости и при новых осях. Параметр одной из плоскостей при новых осях будет PM, поэтому при новых осях мы можем плоскость $SMN'T$ оставить в прежнем положении, и найдем параметр ее по оси PN, если продолжим прямую $N'T$, параллельную OP, до пересечения с PN в точке U. Подобие треугольников NOP и $NN'U$ показывает, что если ON и ON' находятся в рацио-

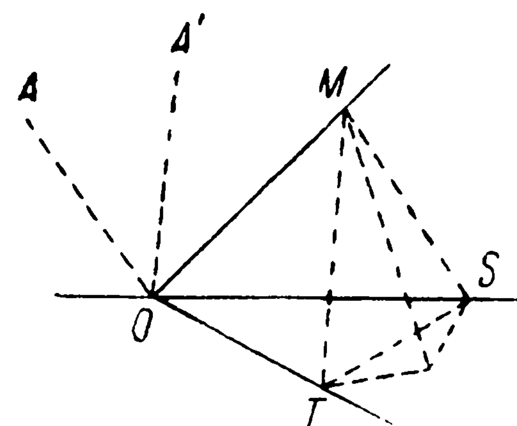
нальном отношении, то и PN и PU будут в таком же отношении.

Итак, мы видели, что если закон рационального отношения между параметрами будет справедлив для данных трех осей координат, то он также будет справедлив еще, если одну из плоскостей координат заменить какой-нибудь из граней кристаллического ряда. Но таким же образом мы можем еще и другую и третью плоскость координат заменить какими-нибудь плоскостями рассматриваемого кристаллического ряда, из чего следует, что всякое пересечение двух кристаллических плоскостей может быть осью координат, обладающею тем свойством, что если через любую точку, взятую на другой оси, мы проведем плоскости, параллельные всем граням кристалла, то параметры всех этих плоскостей по первой оси будут в рациональных отношениях между собой. Мы будем называть *возможною кристаллографическою осью* всякую прямую пересечения двух возможных плоскостей кристаллографического ряда. Таким образом мы доказали, что параметры по каждой возможной кристаллической оси находятся между собой в рациональных отношениях.

При предыдущем доказательстве, заменяя одну из плоскостей координат, мы, для удобства построения, переменили и начало координат; нетрудно понять, что можно этого не делать и что теорема наша будет справедлива и тогда, если новые оси координат перенести параллельно самим себе в прежнее начало координат. Для того чтобы убедиться в этом, стоит только вообразить себе два отдельных построения: в одном пусть плоскости будут размещены таким образом, как это нужно для поверки закона рационального отношения между параметрами по прежним осям, а в другом же, плоскости, параллельные первым, будут размещены так, как это нужно для поверки этого же закона относительно новых осей координат. За этим перенесем второе построение так, чтобы плоскости остались параллельными прежним своим положениям, и так, чтобы начало координат второго построе-

ния совпало бы с началом координат первого. Таким образом, если через какую-нибудь точку провести плоскости, параллельные всем возможным граням данного кристаллического ряда, то все прямые пересечения этих плоскостей можно рассматривать как оси координат, которые будут иметь то свойство, что если через любую точку, взятую на одной из них, проведем плоскости, параллельные всем возможным граням рассматриваемого ряда, то получаемые по каждой из этих осей отрезки или параметры будут находиться в рациональных отношениях.

Докажем также еще, что всякая плоскость, проведенная через две возможные кристаллографические оси, есть возможная кристаллическая плоскость. Пусть ось OA (фиг. 26) есть пересечение плоскостей P и Q и ось OA' — пересечение плоскостей P' и Q'. Я беру за плоскости координат P, P' и еще какую-нибудь плоскость. Через какую-нибудь точку M, взятую на прямой пересечения плоскостей P и P', проведем плоскости, параллельные граням Q и Q'; эти плоскости пересекутся с P и P' по прямым MS и MT, параллельным OA и OA'. Очевидно, плоскость MST, параллельная плоскости, проведенной через OA и OA', имеет по осям OS и OT параметры OS и OT, одинаковые с параметрами по этим осям одной из плоскостей Q и Q', и что вследствие этого плоскость MST параллельна возможной кристаллической плоскости. Если одна из точек S или T, например S, совпадает с O, тогда теорема также справедлива, потому что тогда плоскость MST обращается в возможную плоскость MTO. Если, наконец, одновременно и S и T совпадают с O, то и этот случай не представляет исключения из нашей теоремы, потому что тогда обе оси OA и OA' сливаются в одну, так что теорема до этого случая не относится.



Фиг. 26.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{n}$, где n — число целое, есть количество, соизмеримое только тогда, когда абсолютная величина его равна

$$0, \text{ или } 1, \text{ или } \frac{1}{2}.$$ [1]

Знаем, что

$$2^{2n-1}\cos^{2n}x = \cos 2nx + (2n)_1\cos(2n-2)x + (2n)_2\cos(2n-4) + \\ + \cdots + (2n)_{n-1}\cos 2x + \frac{1}{2}(2n)_n, \qquad (1)$$

$$2^{2n}\cos^{2n+1}x = \cos(2n+1)x + (2n+1)_1\cos(2n-1)x + \\ + (2n+1)_2\cos(2n-3)x + \cdots + (2n+1)_n\cos x; \qquad (2)$$

здесь под обозначением m_k разумеется биноминальный коэффициент $\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$.

Полагая n последовательно равным 1, 2, 3 и пр., из (1) и (2) мы можем по порядку определить $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x, \ldots$, в функциях от $\cos x$. Эти функции будут такого вида:

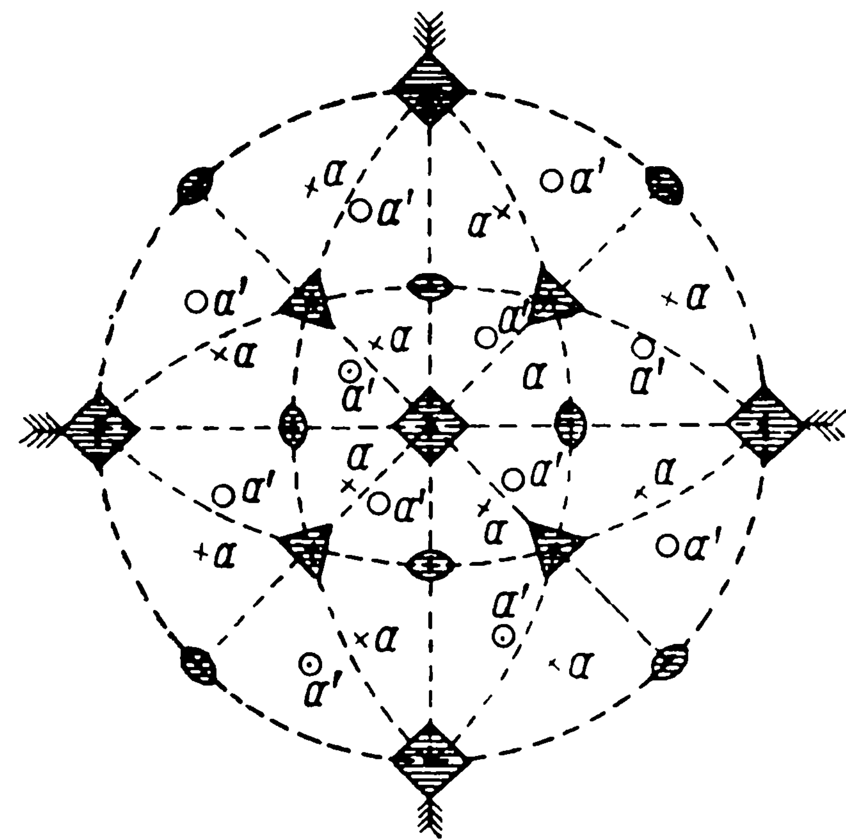
$$\cos 2mx = A_{2m}\cos^{2m}x + A_{2m}^{(1)}\cos^{2m-2}x + A_{2m}^{(2)}\cos^{2m-4}x + \cdots + \\ + A_{2m}^{(m-1)}\cos^2 x + A_{2m}^{(m)}; \qquad (3)$$

$$\cos(2m+1)x = B_{2m+1}\cos^{2m+1}x + B_{2m+1}^{(1)}\cos^{2m-1}x + \\ + B_{2m+1}^{(2)}\cos^{2m-3}x + \cdots + B_{2m+1}^{(m)}\cos x; \qquad (4)$$

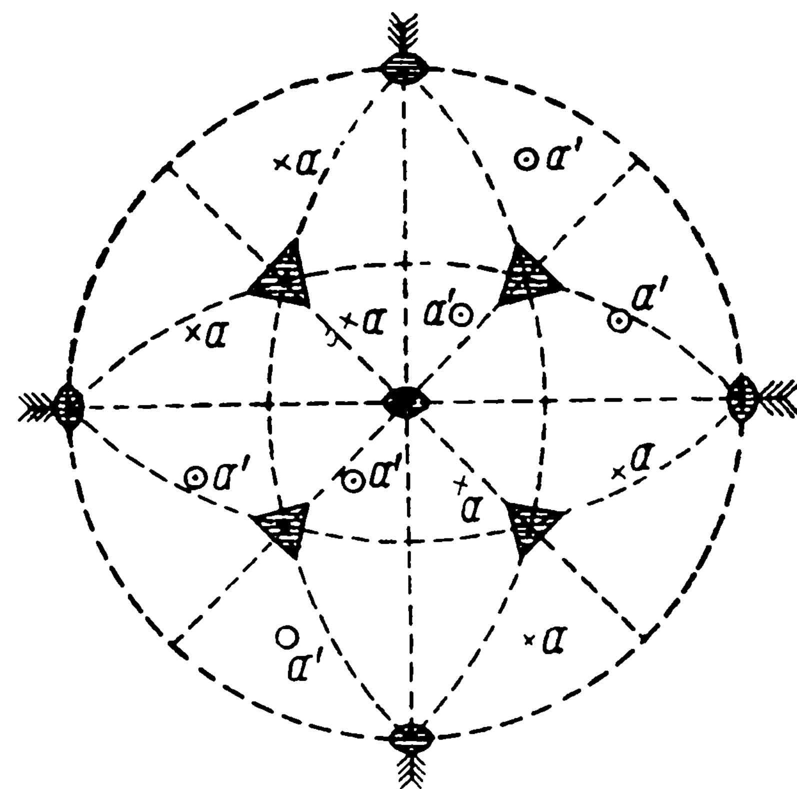
здесь A и B от x не зависят и могут быть найдены по способу неопределенных коэффициентов. Именно (1) и (2) с помощью (3) и (4) принимает вид (положим для краткости $\cos x = y$):

---

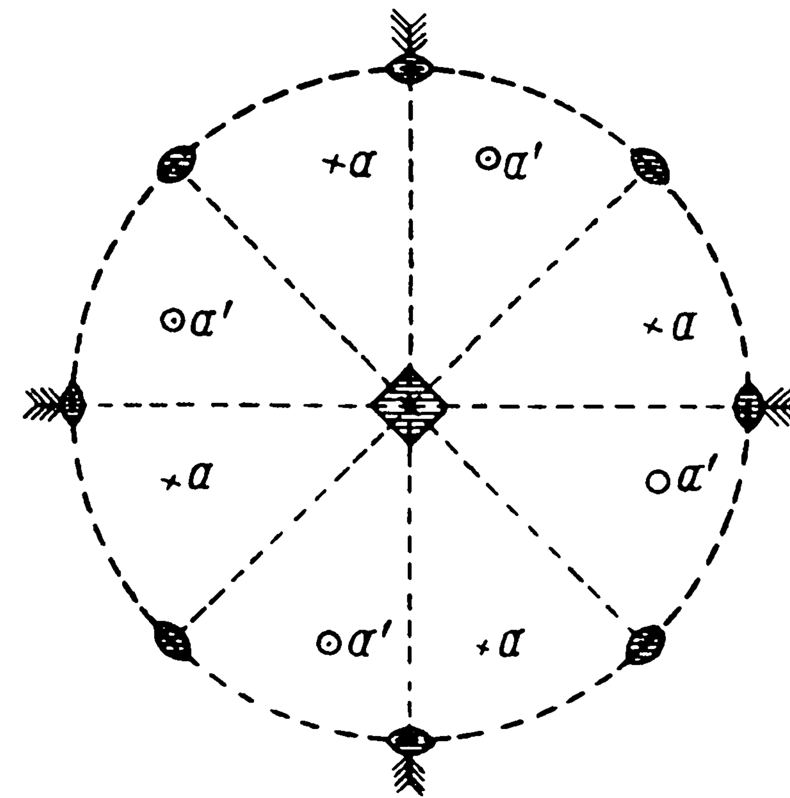
[1] Нижеследующее доказательство нам сообщено Г. Н. Будаевым.



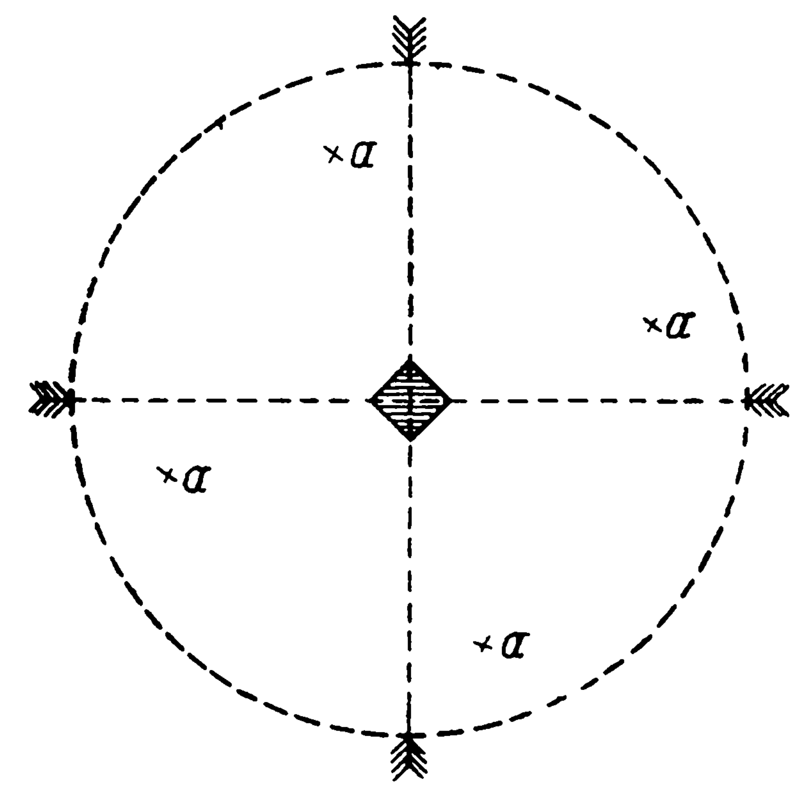
Фиг. 27.



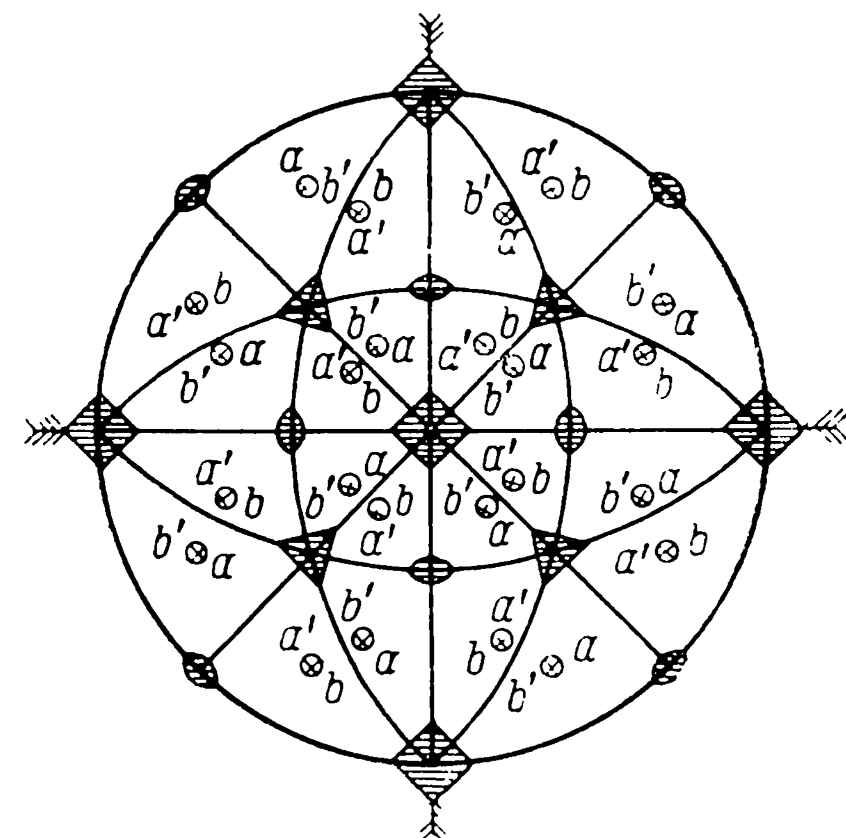
Фиг. 29.



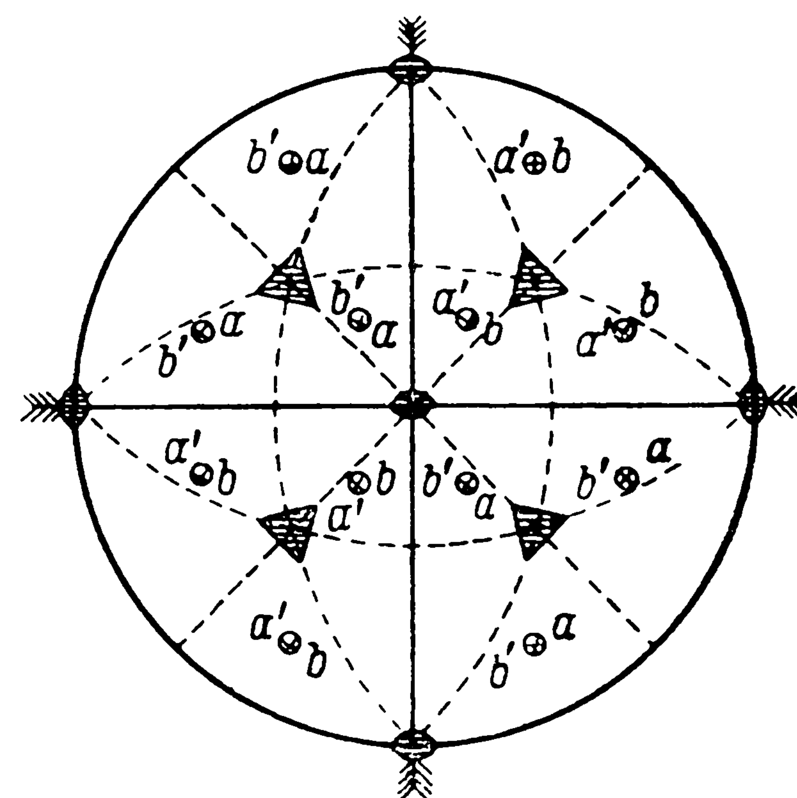
Фиг. 32.



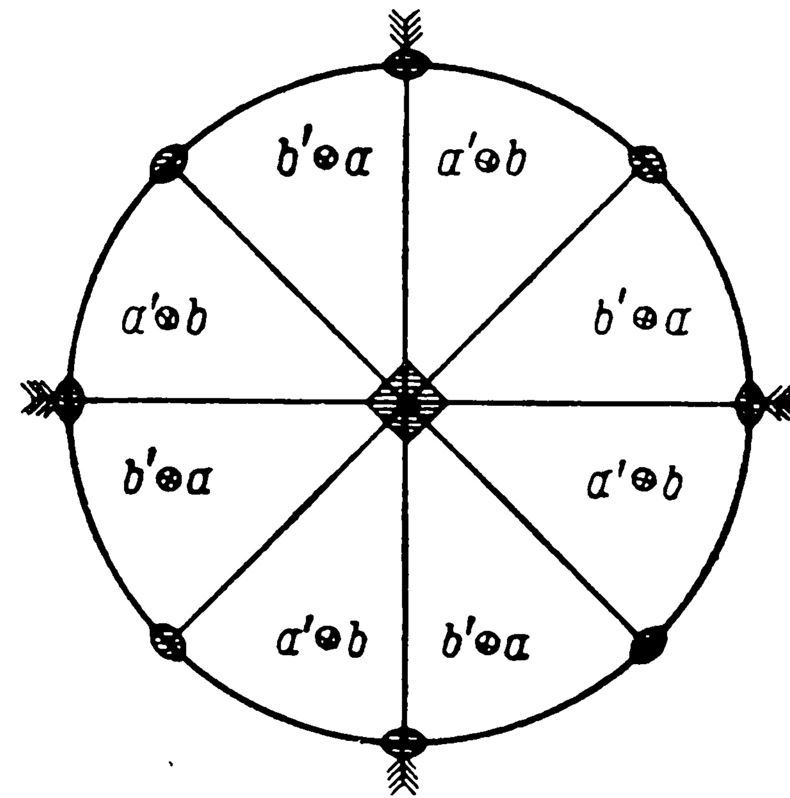
Фиг. 35.



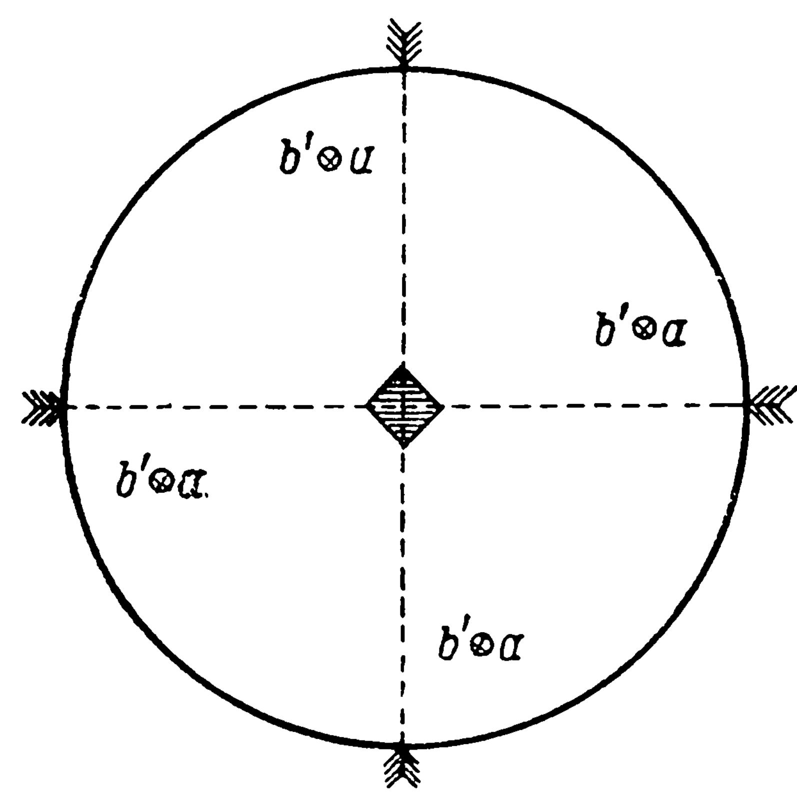
Фиг. 28



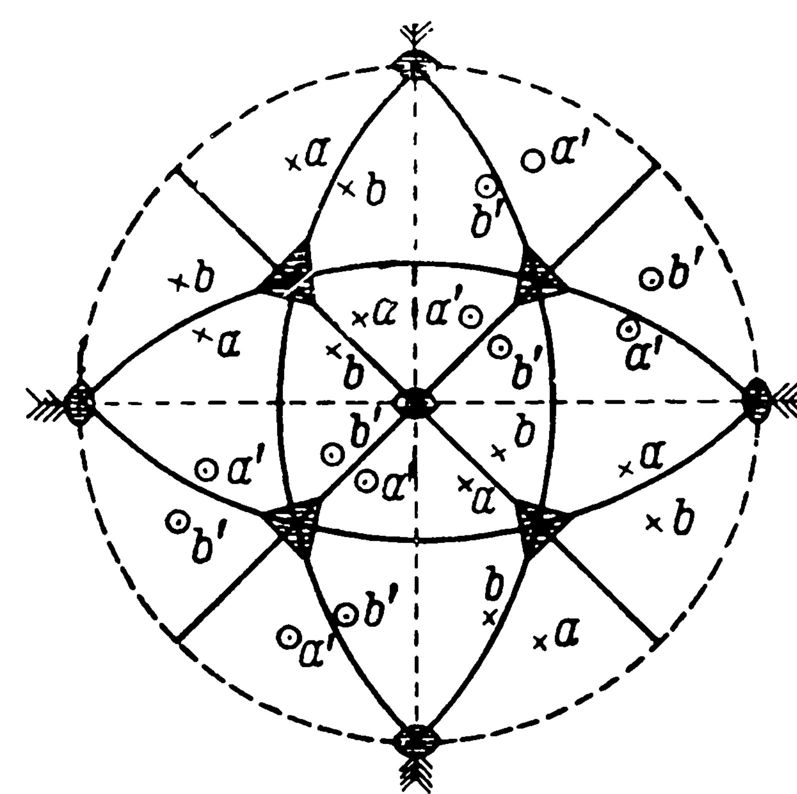
Фиг. 30.



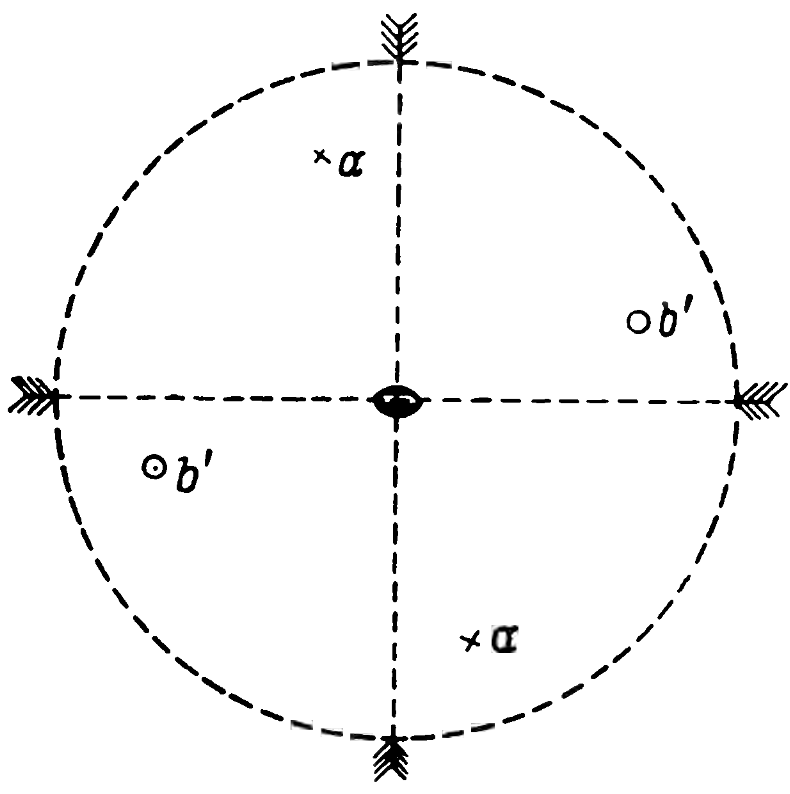
Фиг. 33.



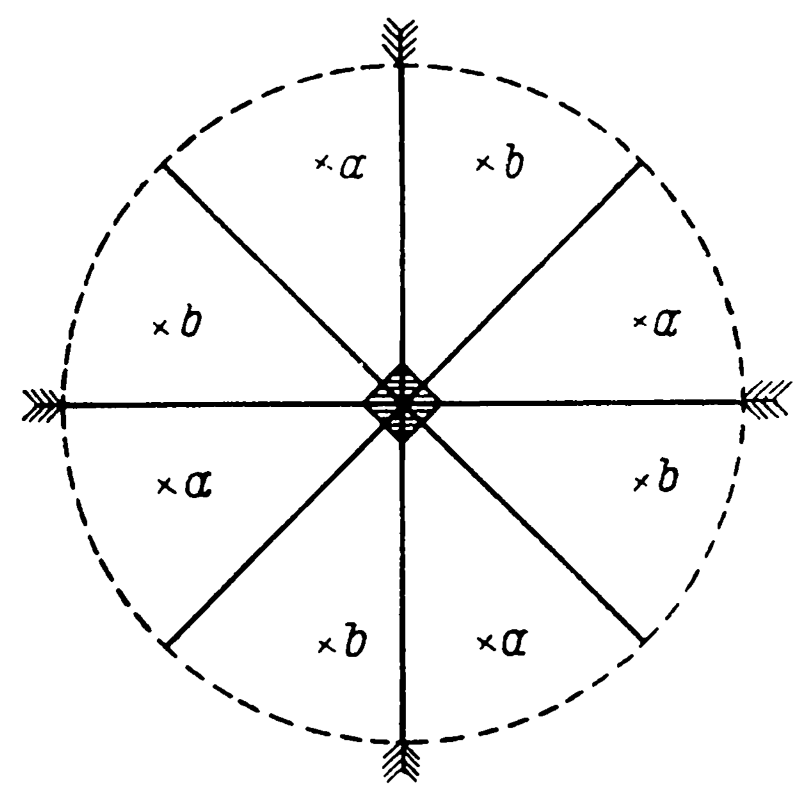
Фиг. 36.



Фиг. 31.

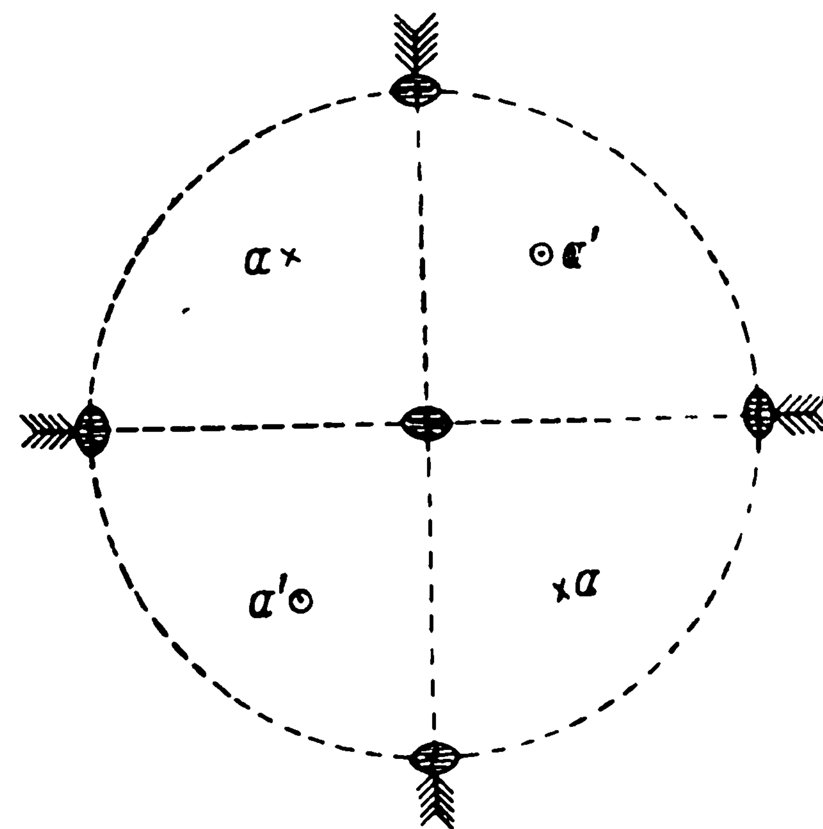


Фиг. 34.

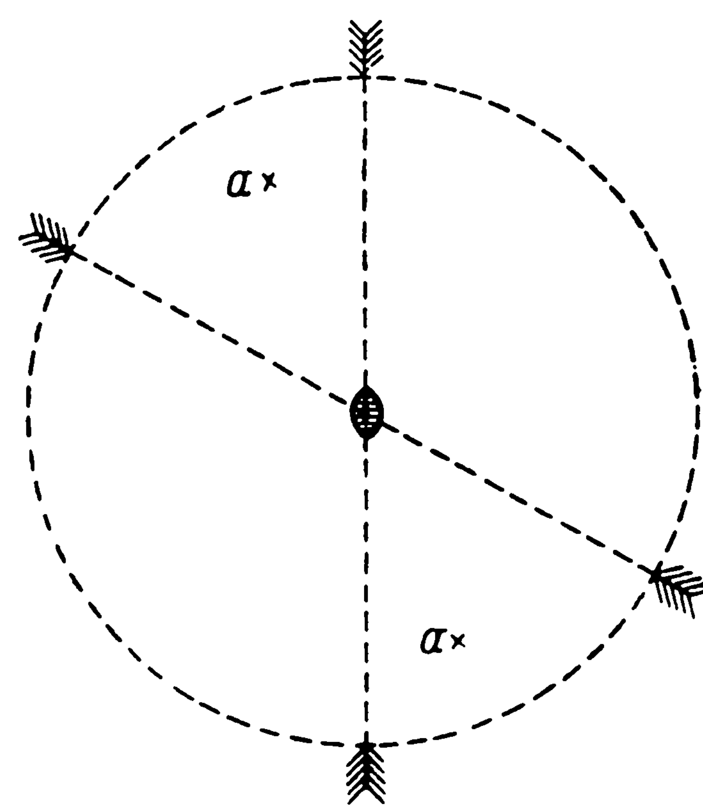


Фиг. 37.

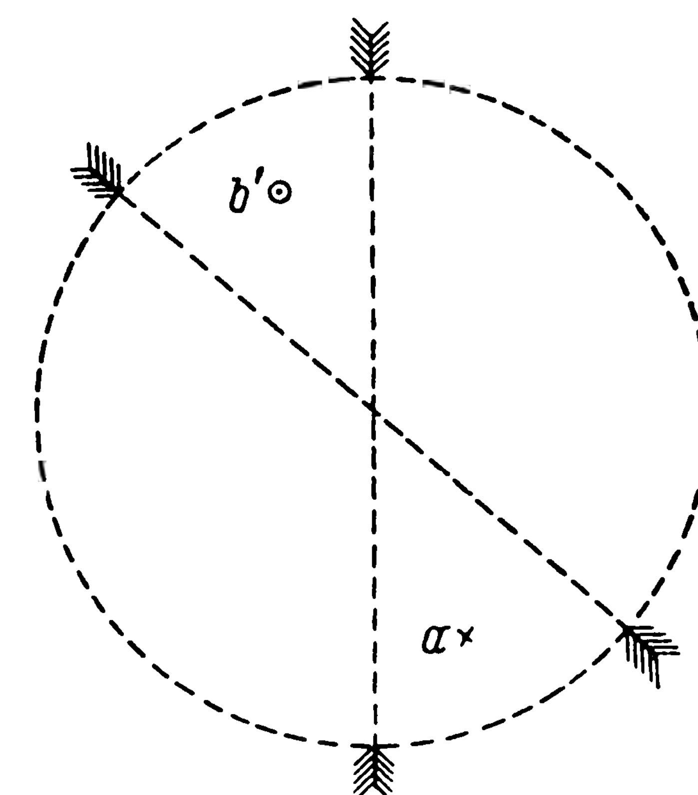
Фиг. 27. I. Гемиэдрия попеременно-плоскостная. (§ 10, 2, A). Фиг. 28. I. Голоэдрия. (§ 16, 1). Фиг. 29. I. Тетартоэдрия. (§ 11). Фиг. 30. I. Гемиэдрия параллельно-плоскостная. (§ 16, 2). Фиг. 31. I. Гемиэдрия тетраэдрическая. (§ 17, 1). Фиг. 32. II. Гемиэдрия трапецоэдрическая. (§ 10, 2, B). Фиг. 33. II. Голоэдрия. (§ 16, 3). Фиг. 34. II. Тетартоэдрия. (§ 18). Фиг. 35. II. Гемиморфия гемиэдрическая. (§ 12). Фиг. 36. II. Гемиэдрия пирамидальная. (§ 16, 4). Фиг. 37. II. Гемиморфия голоэдрическая. (§ 17, 2).



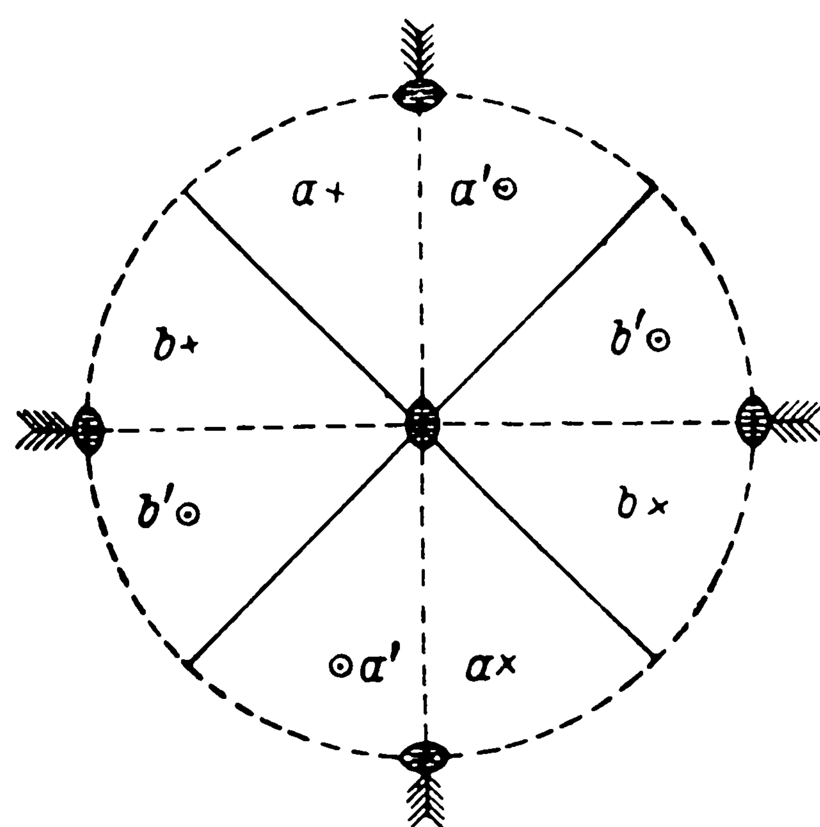
Фиг. 38.



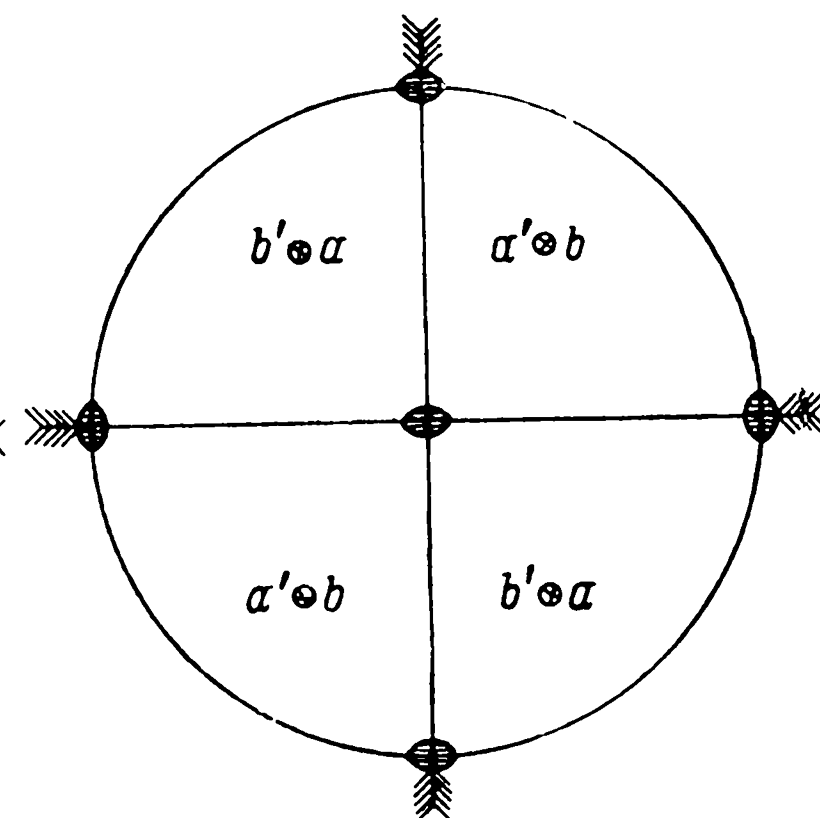
Фиг. 41.



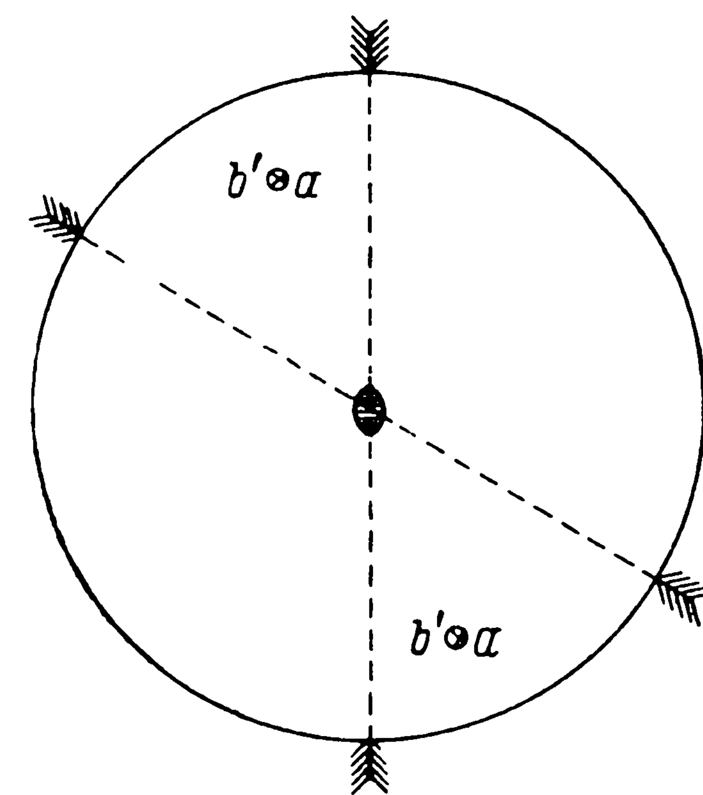
Фиг. 57.



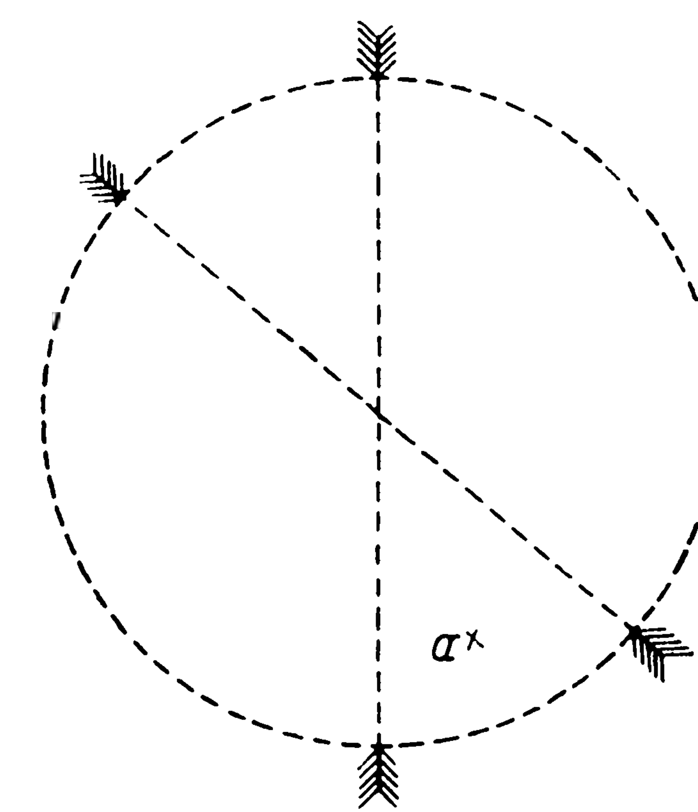
Фиг. 40.



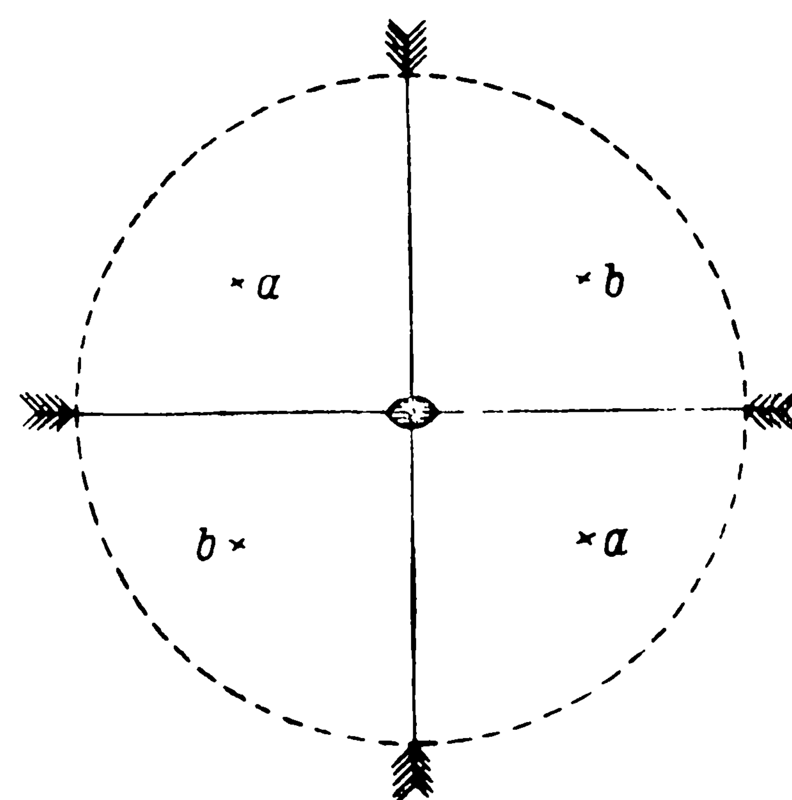
Фиг. 39.



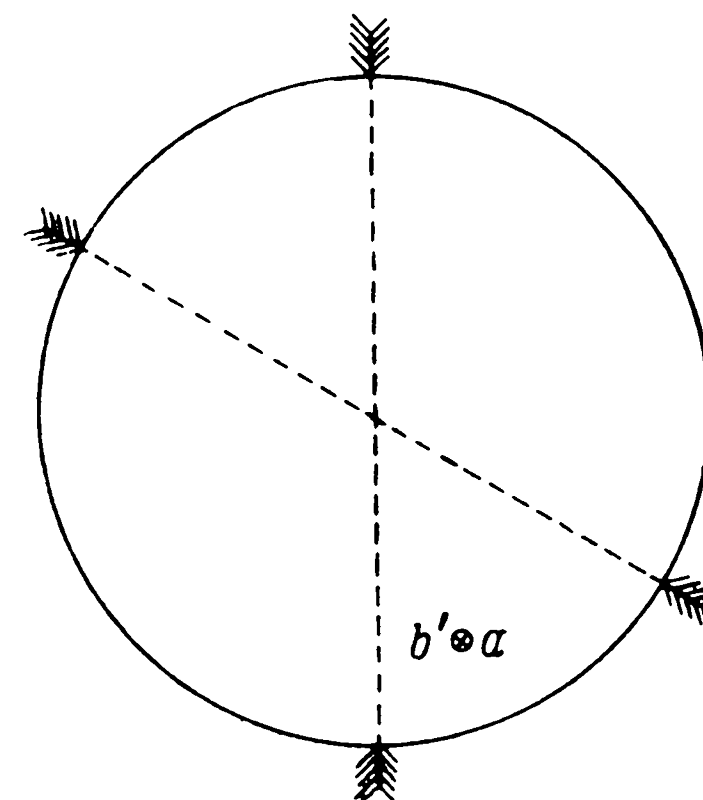
Фиг. 42.



Фиг. 58.

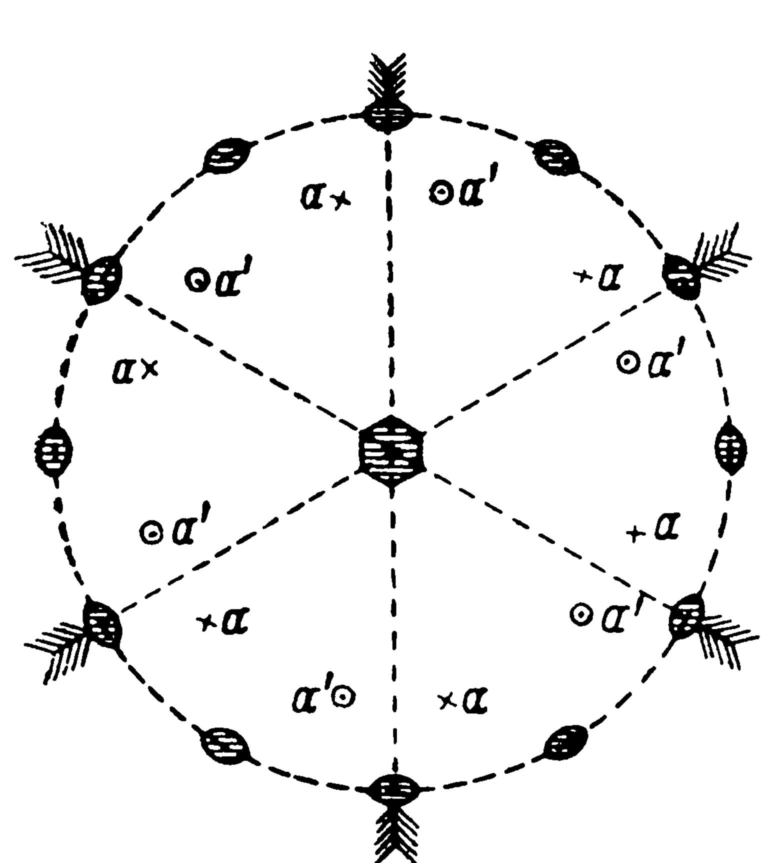


Фиг. 43.

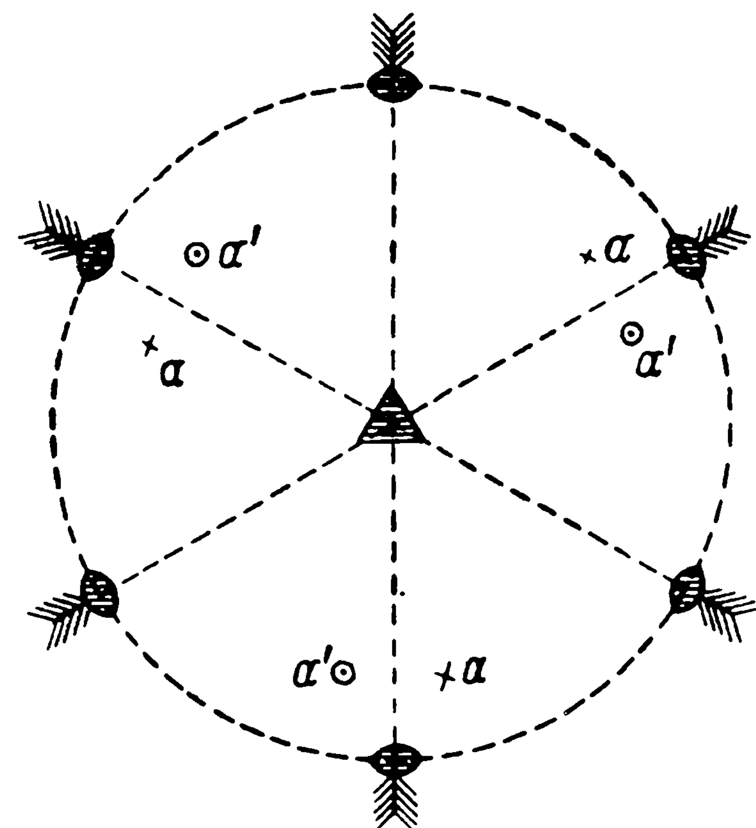


Фиг. 46.

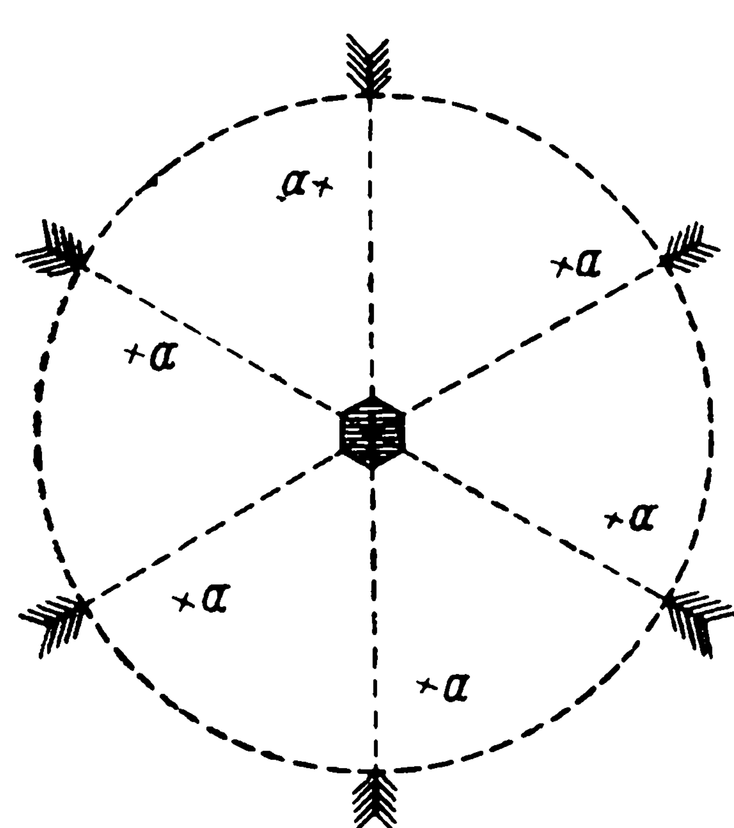
Фиг. 38. IV. Гемиэдрия. (§ 10, 3, A). Фиг. 39. IV. Голоэдрия. (§ 16, 5). Фиг. 40. II. Гемиэдрия сфеноэдрическая. (17, 3). Фиг. 41. V. Гемиморфия. (§ 12). Фиг. 42. V. Голоэдрия. (§ 16, 6). Фиг. 43. IV. Гемиморфия. (§ 17, 4). Фиг. 46. V. Гемиэдрия. (§ 17, 5). Фиг. 57. VI. Голоэдрия. (§ 16, 11). Фиг. 58. VI. Гемиэдрия. (§ 12).



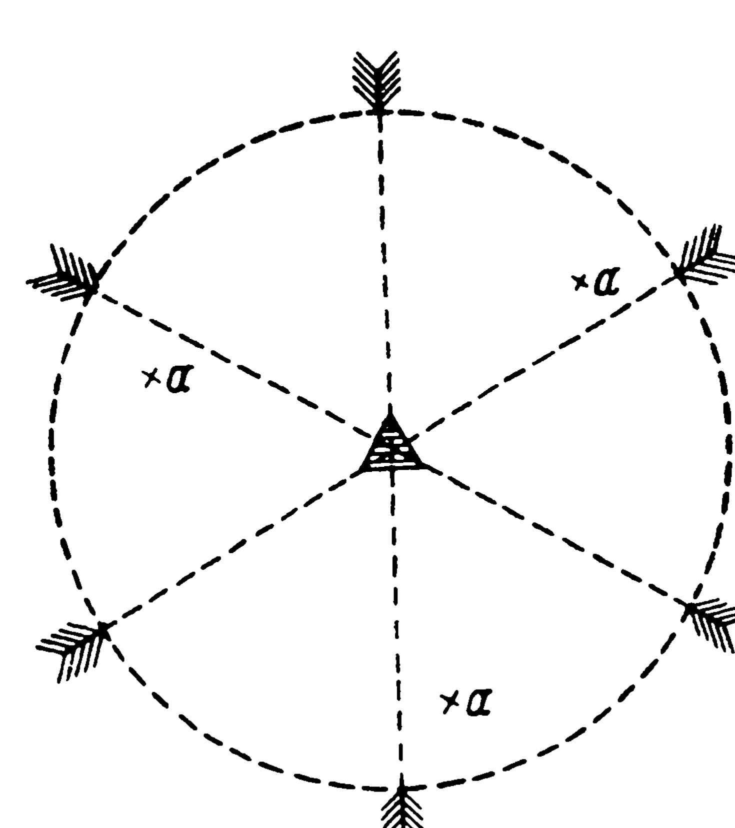
Фиг. 44.



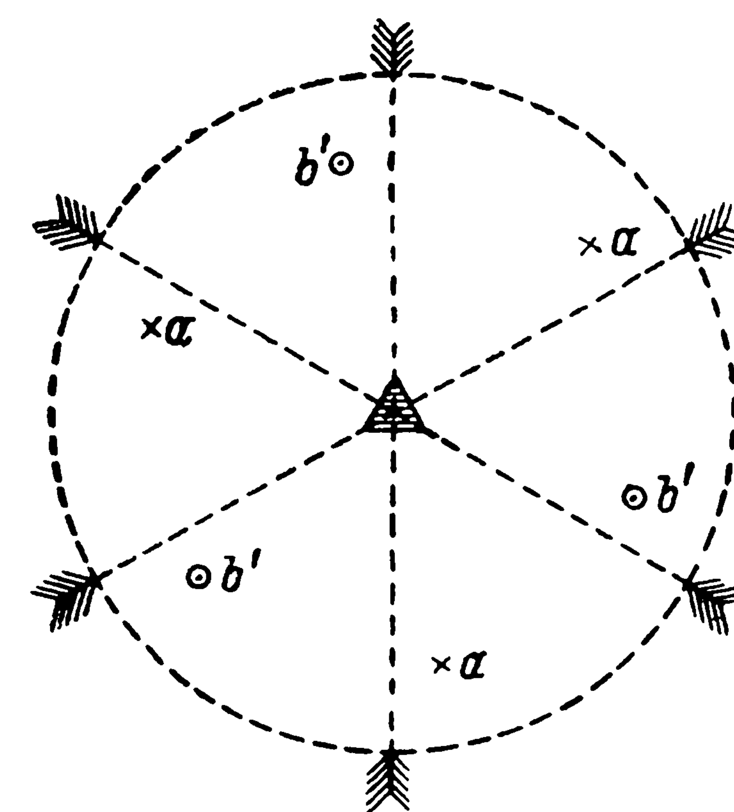
Фиг. 47.



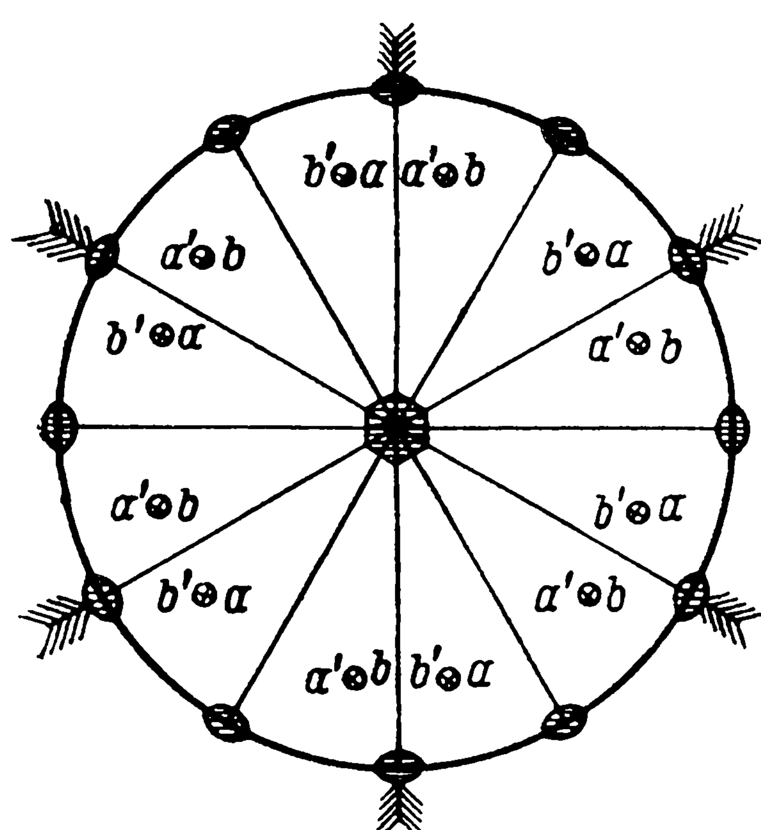
Фиг. 50.



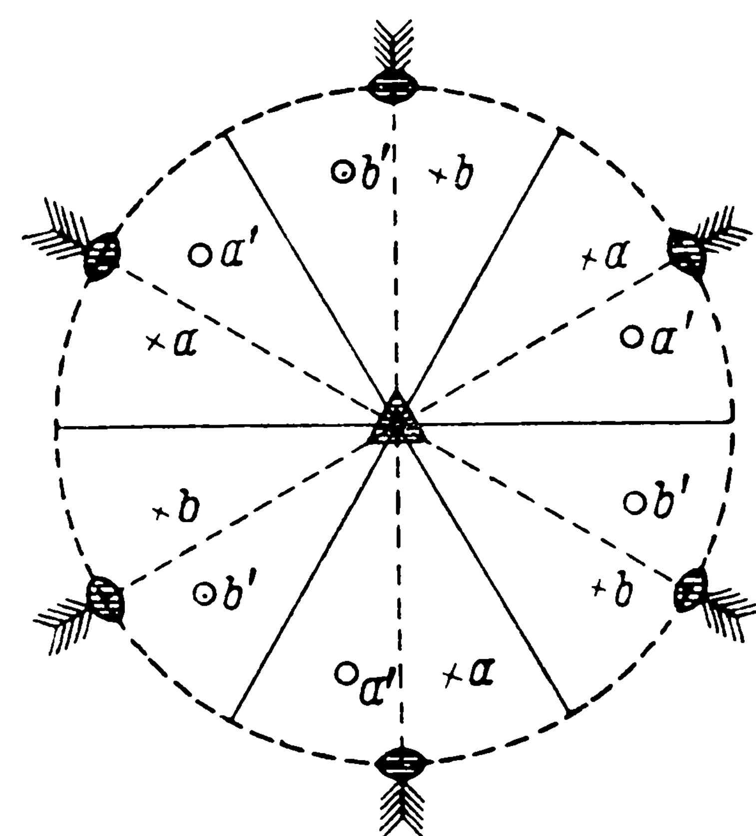
Фиг. 53.



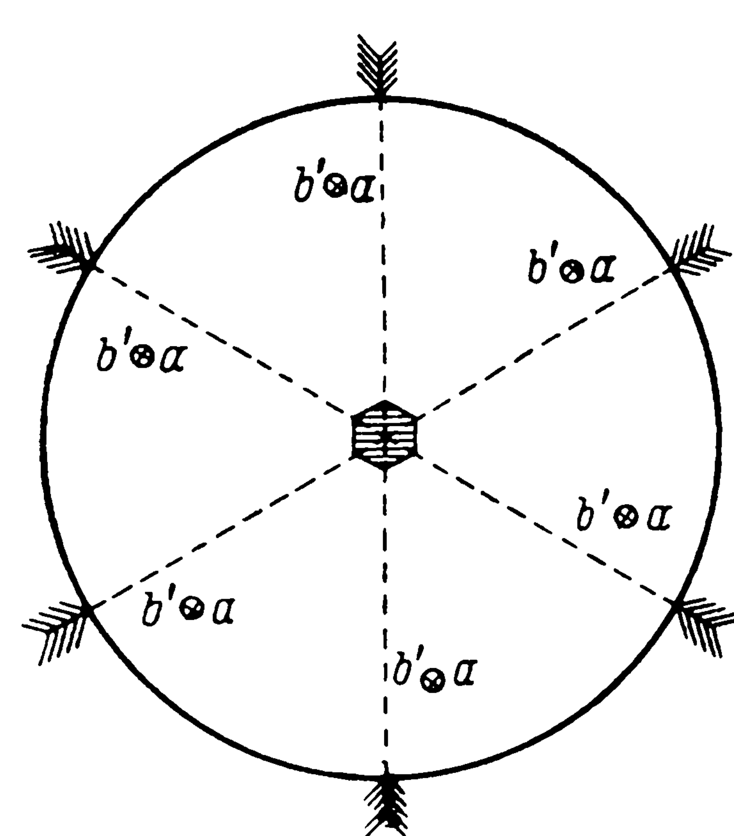
Фиг. 56.



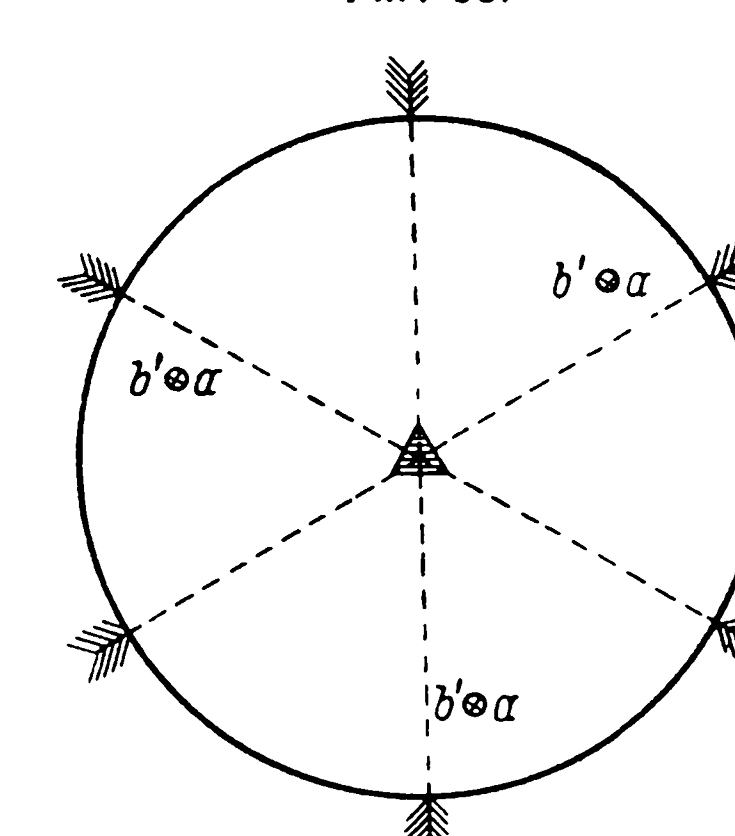
Фиг 45.



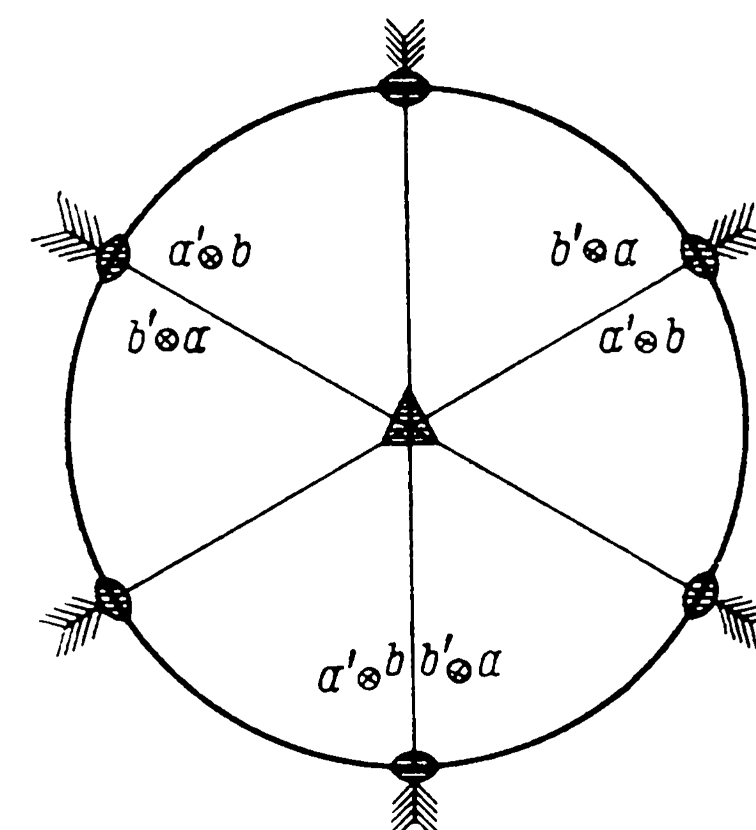
Фиг. 48.



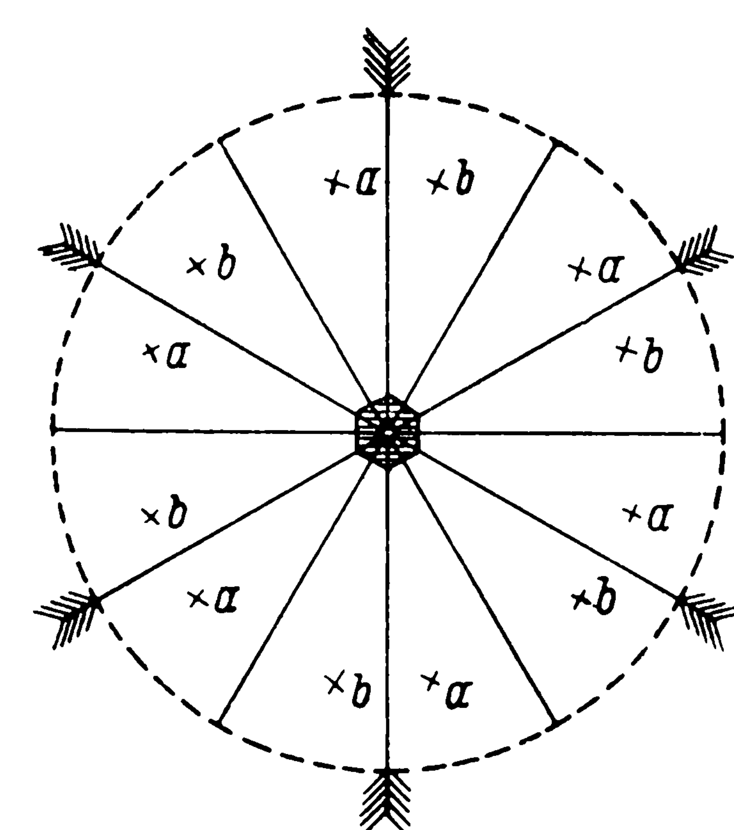
Фиг. 51.



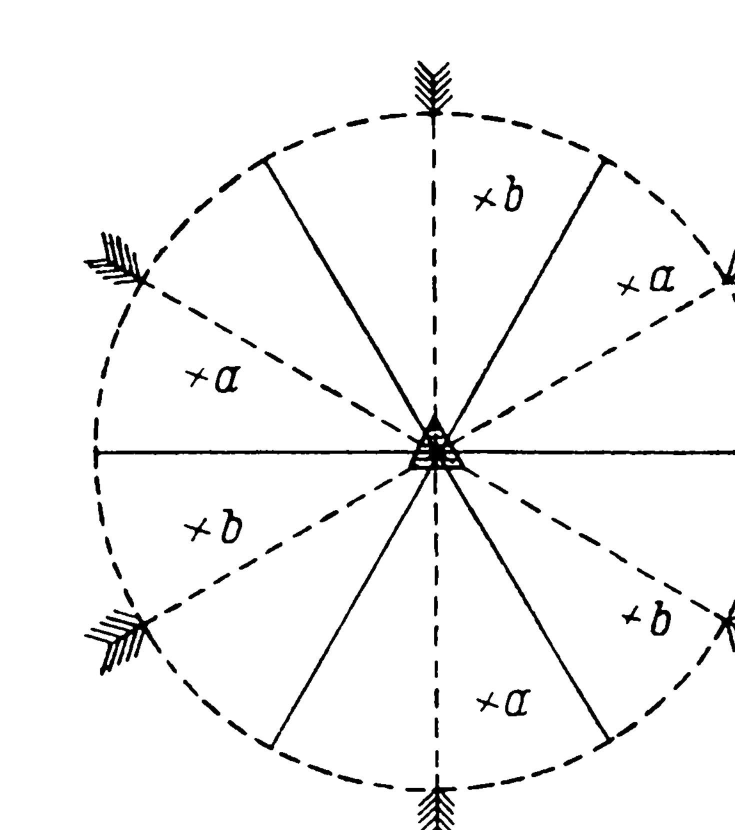
Фиг. 54.



Фиг. 49.



Фиг. 52.



Фиг. 55.

Фиг. 44. III. Гемиэдрия трапецоэдрическая. (§ 10, 1). Фиг. 45. III. Голоэдрия. (§ 16, 7). Фиг. 47. III. Тетартоэдрия трапецоэдрическая. (§ 10, 3, В). Фиг. 48. III. Гемиэдрия ромбоэдрическая. (§ 16, 9). Фиг. 49. III. Гемиэдрия тригонотипная. (§ 17, 6). Фиг. 50. III. Гемиморфия трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии. (§ 12). Фиг. 51. III. Гемиэдрия пирамидальная. (§ 16, 8). Фиг. 52. III. Гемиморфия голоэдрическая (§ 17, 7). Фиг. 53. III. Гемиморфия тетартоэдрическая. (§ 12). Фиг. 54. III. Тетартоэдрия пирамидальная. (17, 8). Фиг. 55. III. Гемиморфия гемиэдрий ромбоэдрической и тригонотипной. (§ 17. 9). Фиг. 56. III. Тетартоэдрия ромбоэдрическая. (§ 16, 10).

$$2^{2n-1}y^{2n} = A_{2n}y^{2n} + A_{2n}^{(1)}y^{2n-2} + A_{2n}^{(2)}y^{2n-4} + \dots + A_{2n}^{(n-1)}y^2 + A_{2n}^{(n)} +$$
$$+ (2n)_1 \{A_{2n-2}y^{2n-2} + A_{2n-2}^{(1)}y^{2n-4} + \dots + A_{2n-2}^{(n-2)}y^2 + A_{2n-2}^{(n-1)}\} +$$
$$+ (2n)_2 \{A_{2n-4}y^{2n-4} + \dots + A_{2n-4}^{(n-3)}y^2 + A_{2n-4}^{(n-2)}\} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (2n)_{n-1} \{A_2y^2 + A_2^1\} + \frac{1}{2}(2n)_n; \tag{5}$$

$$2^{2n}y^{2n+1} = B_{2n+1}y^{2n+1} + B_{2n+1}^{(1)}y^{2n-1} + B_{2n+1}^{(2)}y^{2n-3} + \dots + B_{2n+1}^{(n)}y +$$
$$+ (2n+1)_1 \{B_{2n-1}y^{2n-1} + B_{2n-1}^{(1)}y^{2n-3} + \dots + B_{2n-1}^{(n-1)}y\} +$$
$$+ (2n+1)_2 \{B_{2n-3}y^{2n-3} + \dots + B_{2n-3}^{(n-2)}y\} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ (2n+1)_n y; \tag{6}$$

через сравнение коэффициентов при одинаковых степенях y в (5) и (6) получаем

$$\left.\begin{aligned}
2^{2n-1} &= A_{2n},\\
0 &= A_{2n}^{(1)} + (2n)_1 A_{2n-2},\\
0 &= A_{2n}^{(2)} + (2n)_1 A_{2n-2}^{(1)} + (2n)_2 A_{2n-4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= A_{2n}^{(n-1)} + (2n)_1 A_{2n-2}^{n-2} + (2n)_2 A_{2n-4}^{(n-3)} + \dots +\\
&\qquad + (2n)_{n-1} A_2,\\
0 &= A_{2n}^{(n)} + (2n)_1 A_{2n-2}^{(n-1)} + (2n)_2 A_{2n-4}^{(n-2)} + \dots +\\
&\qquad + (2n)_{n-1} A_2^1 + \frac{1}{2}(2n)_n;
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}
2^{2n} &= B_{2n+1},\\
0 &= B_{2n+1}^{(1)} + (2n+1)_1 B_{2n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$0 = B_{2n+1}^{(n)} + (2n+1)_1 B_{2n-1}^{(n-1)} + (2n+1)_2 B_{2n-3}^{(n-2)} + \cdots + \\ + (2n+1)_{n-1} B_3^{(1)} + (2n+1)_n. \quad (8)$$

Первое из уравнений системы (7) дает $A_{2n} = 2^{2n-1}$ и, следовательно, $A_{2n-2} = 2^{2n-3}$, $A_{2n-4} = 2^{2n-5}$ и т. д.; тогда второе уравнение дает $A_{2n}^{(1)} = C_1 \cdot 2^{2n-3}$, где C_1 есть целое, и, следовательно, $A_{2n-2}^{(1)} = C_1' \cdot 2^{2n-5}$, $A_{2n-4}^{(1)} = C_1'' \cdot 2^{2n-7}$ и т. д.; тогда третье уравнение дает $A_{2n}^{(2)} = C_2 \cdot 2^{2n-5}$, где C_2 — целое, и т. д. Предпоследнее уравнение дает $A_{2n}^{(n-1)} = C_{n-1} \cdot 2$, где C_{n-1} — целое; последнее уравнение, очевидно, даст для $A_{2n}^{(n)}$ некоторое целое значение C_n.

Система (8) дает: $B_{2n+1} = 2^{2n}$, $B_{2n+1}^{(1)} = D_1 \cdot 2^{2n-2}$, $B_{2n+1}^{(2)} = D_2 \cdot 2^{2n-4}, \ldots, B_{2n+1}^{(n-1)} = D_{n-1} \cdot 2^2$, $B_{2n+1}^{(n)} = D_n$, где все D суть целые.

Таким образом, (3) и (4) принимают вид (обозначим C и D при $n = m$ через G и H):

$$\cos 2mx = 2^{2m-1} \cos^{2m} x + G_1 \cdot 2^{2m-3} \cos^{2m-2} x + \\ + G_2 \cdot 2^{2m-5} \cos^{2m-4} x + \cdots + G_{m-1} \cdot 2 \cos^2 x + G_m;$$

$$\cos(2m+1)x = 2^{2m} \cos^{2m+1} x + H_1 \cdot 2^{2m-2} \cos^{2m-1} x + \\ + H_2 \cdot 2^{2m-4} \cos^{2m-3} x + \cdots + H_{m-1} \cdot 2^2 \cos^3 x + H_m \cos x.$$

Умножив их на 2 и положив для краткости $2 \cos x = z$, получаем

$$2 \cos 2mx = z^{2m} + G_1 z^{2m-2} + G_2 z^{2m-4} + \cdots + \\ + G_{m-1} z^2 + 2G_m; \quad (9)$$

$$2 \cos(2m+1)x = z^{2m+1} + H_1 z^{2m-1} + H_2 z^{2m-3} + \cdots + \\ + H_{m-1} z^3 + H_m z; \quad (10)$$

все G и H суть количества целые, от z не зависящие.

Положим в (9) $2mx = 2\pi$ и, следовательно, $z = 2 \cos \frac{2\pi}{2m}$, а в (10) $(2m+1)x = 2\pi$ и, следовательно, $z = 2 \cos \frac{2\pi}{2m+1}$; тогда (9) и (10) примут вид

$$z^{2m}+G_1z^{2m-2}+G_2z^{2m-4}+\cdots+G_{m-1}z^2+2(G_m-1)=0; \quad (11)$$

$$z^{2m+1}+H_1z^{2m-1}+H_2z^{2m-3}+\cdots+H_mz-2=0. \quad (12)$$

В обоих уравнениях все коэффициенты суть целые и первые из них суть 1, а потому соизмеримые корни в (11) и (12) должны быть все целые; но так как $z=2\cos\frac{2\pi}{2m}$ для (11) и $z=2\cos\frac{2\pi}{2m+1}$ для (12) по абсолютной величине больше 2 быть не может, то целые значения $z:a$ могут быть только 0, ± 1, ± 2. Итак, для дуг вида $\frac{2\pi}{n}$ (n — число целое) косинус не иначе может быть соизмеримый, как когда он будет равен одному из количеств 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1; для этих же значений его дуга, не бóльшая чем π, действительно есть вида $\frac{2\pi}{n}$.

Если в (9) положим $2mx=k\pi$ и в (10) $(2m+1)x=k\pi$, где k — число целое, то подобным же образом найдем, что косинус или синус дуги вида $\frac{k\pi}{n}$ только тогда бывает соизмеримое количество, когда значение его есть 0, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

Коэффициенты в равенствах (3) и (4) определяются по формулам

$$A_{2m}^{(k)}=(-1)^k\{(2m-k)_k+(2m-k-1)_{k-1}\}\cdot 2^{2m-2k-1};$$

$$B_{2m+1}^{(k)}=(-1)^k\{(2m-k+1)_k+(2m-k)_{k-1}\}\cdot 2^{2m-2k}.$$

ОБЪЯСНЕНИЕ ЧЕРТЕЖЕЙ

Бóльшая часть чертежей суть стереографические проекции, посредством которых изображены на плоскости бумаги точки и круги, находящиеся на поверхности шара [84]. В этих фигурах круг, очерчивающий фигуру, есть пересечение с плоскостью бумаги того шара, на котором находятся точки и круги, изображенные на бумаге. Какая-нибудь точка, нахо-

дящаяся на поверхности этого шара, проектируется на бумагу посредством прямой, проведенной из нее к более отдаленному от этой точки полюсу плоскости бумаги. Таким образом, для проектирования точек, находящихся на верхней половине шара (выше бумаги), служит нижний полюс, а для проектирования нижних точек шара служит верхний полюс. В одну и ту же точку проектируются две точки поверхности шара — одна верхняя, другая нижняя, находящиеся на одной и той же прямой, перпендикулярной к плоскости бумаги. Две точки, находящиеся на концах одного и того же диаметра шара, проектируются на одном и том же диаметре обводного круга проекции и в одинаковых расстояниях от центра этого круга. Положение какой-нибудь кристаллической грани обозначается на чертеже проекцией точки прикосновения с шаром плоскости, параллельной этой грани, причем эта плоскость, касательная к шару, должна быть проведена таким образом, чтобы перпендикуляр к ней, проведенный к центру шара, был направлен в ту сторону, в которой находится относительно рассматриваемой грани вещество кристалла. Таким образом, две параллельные грани, находящиеся на противоположных сторонах кристалла, обозначаются двумя точками, находящимися в одинаковом расстоянии от центра обводного круга на одном и том же диаметре этого круга; одна из этих точек проектирована с верхней половины шара, а другая — с нижней. В тех фигурах, в которых встретилась надобность делать различие между точками, проектированными с верхней и с нижней половины шара, первые обозначены крестиками, а вторые обведены небольшими кружками. Если одна и та же точка в проекции служит для изображения двух граней — одной верхней и другой нижней, — то такая точка обозначена крестиком, обведенным кружком; эти две грани в этом случае расположены симметрично относительно плоскости бумаги. Положение прямых, проходящих через центр шара, обозначено проекциями точек встречи этих прямых с поверхностью шара. Если эти прямые суть оси совмещения, то в некото-

рых случаях около точек, изображающих положение их, мы начертили различные знаки, смотря по природе осей; так, например: небольшой овал обозначает ось в 180°, треугольник — ось в 120°, квадрат — ось в 90° и шестиугольник — ось в 60°. Плоскости, проведенные через центр шара, мы обозначили проекцией пересечения их с поверхностью шара; из этих плоскостей мы обозначили плоскости симметрии сплошными черными чертами, между тем как другие плоскости, нужные собственно только для построения, обозначены пунктиром. В фиг. 27 по 58 — точки, обозначающие положение граней общей простой формы, служат вместе с тем для обозначения относительного положения равных направлений, причем всякое направление подразумевается идущим из центра шара к той точке, проекция которой изображена на чертеже. Направления совместимо равные обозначены одной и той же буквой a или b, между тем как направление, обозначенное через b, симметрично равно другому направлению, обозначенному через a. Из этих направлений — идущие от центра шара к точкам нижней поверхности шара обозначены через a' и b'. На этих же фигурах мы обозначили также и направления характеристических кристаллографических осей, так как их принимает г-н Науман. За исключением фиг. 57 и 58, соответствующих триклиноэдрической системе, во всех прочих фигурах одна из осей, перпендикулярная к плоскости бумаги, проектируется в центре обводного круга, между тем как прочие оси, совпадающие с плоскостью бумаги, обозначены стрелками. В фиг. 57 и 58 мы полагаем плоскость бумаги, совпадающей с плоскостью двух из осей, которые и обозначены стрелками; третья же ось, наклонная к плоскости бумаги, на этих фигурах вовсе не обозначена.

ОБЗОР СОДЕРЖАНИЯ

Стр.

Введение 9

Глава I. О равенстве направлений 11

§ 1. Равные направления в кристалле. Равенство совмещения и равенство симметричное 11

Глава II. Об осях совмещения 13

§ 2. Ось совмещения и угол совмещения 13

§ 3. Несколько возможных кристаллографических осей, направленных вдоль по ребрам правильной пирамиды, могут существовать только тогда, если косинус центрального угла основания этой пирамиды есть рациональная величина 15

§ 4. Угол наименьшего совмещения около какой-нибудь оси может быть только 60°, 90°, 120° или 180° 17

§ 5. Об углах между осями совмещения 18

§ 6. Существование двух осей в 180°, 90° или 60°, одноименных или разноименных, наклоненных друг к другу под углом α, влечет за собой существование оси совмещения в 2α, перпендикулярной к первым двум осям, и углы между осями в 180°, 90° и 60°, одноименными или разноименными, могут иметь только одно из значений 30°, 45°, 60° и 90° 19

§ 7. Если существует ось в 180°, 90° или 60° и другая ось совмещения в 2α, перпендикулярная к первой, то в плоскости, перпендикулярной ко второй оси, существуют кроме осей, одноименных с первой и образующих с нею углы 2α, еще оси в 180°, разделяющие пополам углы между первыми осями 20

§ 8. К оси в 90° другая ось в 60°, 90° или 180° может быть наклонена только под одним из углов 45° или 90° 20

§ 9. К оси в 60° другая ось в 60°, 90° или 180° может быть наклонена только под прямым углом 21

§ 10. Все возможные совокупления между собою осей совмещения в 60°, 90° и 180° суть:

1) Ось в 60° с шестью перпендикулярными к ней осями в 180°, наклоненными друг к другу под углами в 30°. Фиг. 44.

2) А. Три оси в 90°, направленные по главным осям правильной кристаллической системы, шесть осей в 180°, направленных по ромбическим осям, и четыре оси в 120°, направленные по тригональным осям. Фиг. 27.

Стр.

2) В. Ось в 90° и четыре оси в 180°, к ней перпендикулярные и образующие между собою углы в 45°. Фиг. 32.

3) А. Три взаимно перпендикулярные оси в 180°. Фиг. 38.

3) В. Три оси в 180°, расположенные в одной плоскости и образующие между собой углы в 60°, и четвертая ось в 120°, им перпендикулярная. Фиг. 47 21

§ 11. Кроме рассмотренных в § 10, возможно одно только совокупление осей в 120° с осями в 180°, 90° и 60°, а именно: три взаимно перпендикулярные оси в 180° и четыре оси в 120°, проходящие через середины октантов между первыми осями. Фиг. 29 25

§ 12. Кроме исчисленных в §§ 10 и 11 шести случаев совокупления между собою нескольких осей совмещения, четырех случаев, в которых какая-нибудь из осей в 60°, 90°, 120° и 180° существует отдельно от других (фиг. 50, 35, 53 и 41), и, наконец, случая, в котором нет ни одной оси совмещения (фиг. 58), других случаев не может быть 26

Глава III. О законах симметрии 28

§ 13. Симметричное равенство может иметь место или тогда, если существует или закон параллельности, или плоскость симметрии, или сфеноидальная симметрия, всегда соединенная с осью совмещения в 180° 28

§ 14. О совокуплении законов симметрии с осями совмещения 33

§ 15. 1) Совокупление оси совмещения в 180°, 90° или 60° с законом параллельности дает плоскость симметрии, перпендикулярную к оси совмещения.

2) Совокупление плоскости симметрии с осью совмещения в 180°, 90° или 60°, к ней перпендикулярной, влечет за собой закон параллельности.

3) Существование двух плоскостей симметрии, пересекающихся под углом α, влечет за собой существование оси совмещения с 2α, направленной по прямой их пересечения.

4) Существование оси совмещения с 2α и плоскости симметрии, через нее проходящей, влечет за собой существование другой плоскости симметрии, проходящей через ту же ось совмещения и образующей с первой плоскостью угол α 34

§ 16. Совокупление закона параллельности с различными комбинациями осей совмещения дает следующие различные случаи:

Стр.

1) Девять плоскостей симметрии, из которых три, взаимно перпендикулярные, пересекаются между собой по осям совмещения в 90°; другие же шесть плоскостей симметрии разделяют пополам углы между первыми плоскостями, пересекаются между собой по осям в 120° и с первыми плоскостями еще по осям в 180°. Фиг. 28.

2) Три плоскости симметрии, взаимно перпендикулярные, пересекающиеся по осям в 180° и оси в 120°, проходящие по середине октантов, образуемых плоскостями симметрии. Фиг. 30.

3) Четыре плоскости симметрии, пересекающиеся по оси совмещения в 90° под углами в 45° между смежными плоскостями, и пятая плоскость симметрии, перпендикулярная к первым и пересекающаяся с ними по осям в 180°. Фиг. 33.

4) Ось в 90° и плоскость симметрии, к ней перпендикулярная. Фиг. 36.

5) Три плоскости симметрии, взаимно перпендикулярные, пересекающиеся по осям в 180°. Фиг. 39.

6) Плоскость симметрии, перпендикулярная к оси в 180°. Фиг. 42.

7) Шесть плоскостей симметрии, пересекающихся по оси в 60°, так чтобы углы между смежными плоскостями были 30°, и седьмая плоскость симметрии, перпендикулярная к первым и пересекающаяся с ними по осям в 180°. Фиг. 45.

8) Ось в 60° и плоскость симметрии, к ней перпендикулярная. Фиг. 51.

9) Ось в 120° и перпендикулярные к ней три оси в 180°, пересекающиеся под углами в 60°. Через ось в 120° и посредине между осями в 180° проходят три плоскости симметрии. Фиг. 48.

10) Совокупление оси в 120° с законом параллельности. Фиг. 56.

11) Случай без оси совмещения и плоскости симметрии, с одной только параллельностью граней. Фиг. 57 35

§ 17. Совокупление плоскостей симметрии с прежними комбинациями дает следующие новые случаи:

1) Три взаимно перпендикулярные оси в 180°, четыре оси в 120°, равно отстоящие от первых, и шесть плоскостей симметрии, проходящих через каждые две оси в 120°. Фиг. 31.

Стр.

2) Четыре плоскости симметрии, пересекающиеся по оси в 90°, при угле 45° между смежными плоскостями. Фиг. 37.

3) Три оси в 180°, взаимно перпендикулярные, и две плоскости симметрии, пересекающиеся по одной из них и проходящие посредине между двумя другими. Фиг. 40.

4) Две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через ось в 180°. Фиг. 43.

5) Плоскость симметрии без оси совмещения и без закона параллельности. Фиг. 46.

6) Три плоскости симметрии, пересекающиеся по оси в 120° под углами в 60°, и четвертая плоскость симметрии, перпендикулярная к первым и пересекающаяся с ними по осям в 180°. Фиг. 49.

7) Шесть плоскостей симметрии, пересекающихся по оси в 60°, при угле 30° между смежными плоскостями. Фиг. 52.

8) Ось в 120° и плоскость симметрии, к ней перпендикулярная. Фиг. 54.

9) Три плоскости симметрии, пересекающиеся по оси в 120° под углами в 60°. Фиг. 55 36

§ 18. Прибавление закона сфеноидальной гемиэдрии к тридцати одному предыдущему случаю дает один только новый случай, в котором существует одна только сфеноидальная симметрия без всякого прибавления. Фиг. 34 40

Глава IV. Обзор кристаллографических групп 42

§ 19. Характеристика кристаллографических систем 42

§ 20. Исчисление определенных выше тридцати двух кристаллографических групп и сравнение их с группами Наумана 42

Глава V. О расположении и размерах характеристических кристаллографических осей 61

§ 21. При разделении кристаллов на группы по методу равных направлений будут ли существовать оси, которые обыкновенно полагаются в основание при разделении на кристаллографические системы? 61

§ 22. Ось совмещения в 180°, 90° или 60° вместе с тем непременно есть возможная кристаллографическая ось. Об иррациональной оси в 180° 62

§ 23. Всегда возможна грань, перпендикулярная к оси совмещения в 90° или 60°, а также и к рациональной оси в 180° 66

Стр.

§ 24. При оси совмещения в 90° или 60°, а также и при рациональной оси совмещения в 180°, две кристаллографические оси, совмещающиеся при повороте около оси совмещения на 180°, суть равномерны 67
§ 25. Непременно существует возможная кристаллографическая ось, перпендикулярная к оси совмещения в 60° или 90°, и прямая, с которой она сливается при повороте около оси совмещения на 60° или 90°, будет кристаллографической осью, равномерной с первой 68
§ 26. Установление закона, что во всяком кристаллическом ряду существуют четыре грани, параллельные граням трехсторонней пирамиды 69
§ 27. Свод некоторых заключений из предыдущих параграфов 70
§ 28. При оси совмещения в 120°, совмещающиеся кристаллографические оси могут быть неравномерны 71
§ 29. Если при оси совмещения в 120° совмещающиеся оси равномерны, то ось в 120° есть кристаллографическая ось, и наоборот. При этом существуют три равномерные кристаллографические оси, перпендикулярные к оси совмещения в 120° и пересекающиеся под углами в 60° 72
§ 30. Если закон рационального отношения между тангенсами углов между плоскостями одного пояса имеет общее применение, то ось совмещения в 120° всегда есть кристаллографическая ось 73
§ 31. Расположение и размеры кристаллографических осей в каждой отдельной кристаллографической группе 74
§ 32. Заключение о расположении и размерах кристаллографических осей в различных группах 79
Глава VI. Исчисление простых форм некоторых групп 81
§ 33. Простые формы всех гемиморфий, пирамидальной тетартоэдрии гексагональной системы, а также и гемиэдрий моноклиноэдрической и триклиноэдрической систем 81
Глава VII. Заключение 85
Приложение А. Закон рационального отношения между параметрами кристаллических граней 91
Приложение Б. Доказательство теоремы 96
Объяснение чертежей 99

ПРИЛОЖЕНИЯ



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Работа А. В. Гадолина „Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала“ по праву пользуется славой подлинно классического произведения в области кристаллографии и минералогии.

Сочинение это получило широкое признание во всем мире. Оно было включено в серию „Классики точных наук Оствальда“ (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, № 75, 1897).

Следует иметь в виду, что известность А. В. Гадолина зиждется отнюдь не на одном его „Выводе“. Не меньшей славой пользуется его имя в области артиллерийского дела. Всеобщее признание получили работы „О сопротивлении стен орудия давлению пороховых газов“ (1858) и „Теория орудий, скрепленных кольцами“ (1861). В них А. В. Гадолин „положил начало современной теории слоистых стен орудий, имеющей первостепенное значение при их проектировании“.[1] Им же установлен основной закон теории привода станков.[2] Незадолго перед смертью А. В. Гадолин выступил с обширной статьей „О законе изменяемости ветра“ (1890). В этом труде дана интересная попытка подвергнуть математическому исследованию вопрос об изменяемости ветра.

---

[1] См. С. В. Шухардин. А. В. Гадолин. Сб. „Люди русской науки“, раздел „Техника“, т. II, 1948, стр. 923.

[2] См. сб. „Исследования в области металлорежущих станков“, Машгиз, 1952, стр. 3.

Приведем главнейшие даты и события, относящиеся к биографии А. В. Гадолина.

Аксель Вильгельмович Гадолин родился 12 июня (ст. ст.) 1828 г. В 1847 г. он окончил с отличием курс первоначального образования в Финляндском кадетском корпусе. Высшее специальное образование Гадолин получил в Михайловском артиллерийском училище (впоследствии Артиллерийской академии), по окончании которого в 1849 г. был оставлен там же репетитором по физике (по представлению известного физика акад. Э. Х. Ленца). В 1854 г. он стал преподавателем физики и физической географии в том же учебном заведении. В 1855 г. А. В. Гадолин принимал участие в обороне крепости Свеаборг и за самоотверженную помощь при тушении загоревшегося порохового погреба был награжден боевым орденом. В 1856 г. А. В. Гадолина назначили заведующим Технической артиллерийской школы. В 1858 г. он командируется за границу для ознакомления с постановкой различных технических производств.

После возвращения на родину, в 1861 г., А. В. Гадолин становится инспектором классов и членом Конференции Артиллерийской академии. В 1867 г. его назначают профессором этой Академии по Кафедре артиллерийской технологии и одновременно руководителем всех русских арсеналов. В том же 1867 г. в „Записках Минералогического общества“ публикуется его „Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала“, удостоенный Ломоносовской премии Академии Наук. В 1873 г. А. В. Гадолина избирают членом-корреспондентом Академии Наук по Кафедре физики, а в 1875 г. он становится экстраординарным академиком. Как крупнейший знаток артиллерийской технологии, А. В. Гадолин неоднократно направлялся на специальные заграничные выставки. В 1878 г. Артиллерийская академия присуждает ему звание заслуженного профессора. С 1886 г. он состоит постоянным членом Артиллерийского комитета, работает в комиссиях по перевооружению армии, по воздухоплаванию и др.



А. В. ГАДОЛИН.

В 1890 г. А. В. Гадолин становится ординарным академиком Академии Наук. Петербургский университет избирает его почетным доктором минералогии, а Московский университет — своим почетным членом.

Скончался А. В. Гадолин 15 декабря (ст. ст.) 1892 г. в Петербурге.

В настоящем издании воспроизводится оригинальный текст „Вывода всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала“ по первоначальной его публикации в „Записках Минералогического общества“ (2-я серия, ч. VI, стр. 112—220, 1867).

При подготовке к переизданию сочинения А. В. Гадолина редакция сочла возможным внести в текст следующие изменения: исправлены очевидные опечатки и описки; согласованы буквенные обозначения текста и рисунков; рисунки, помещенные в оригинале на отдельных таблицах в конце книги, размещены в соответствующих местах текста.

К книге приложены статья „История вывода тридцати двух видов симметрии кристаллов“, а также примечания и библиография научных трудов А. В. Гадолина, его литографированных курсов лекций и литературы о нем.

О. М. Аншелес,
И. И. Шафрановский,
В. А. Франк-Каменецкий

ИСТОРИЯ ВЫВОДА ТРИДЦАТИ ДВУХ ВИДОВ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

Установление кристаллографических систем (сингоний) в начале прошлого столетия явилось лишь первым шагом в деле классификации кристаллов на основе их симметрии. Ученые того времени уже сознавали необходимость иногда делить системы на классы. Такое подразделение основывалось на наблюдении, согласно которому некоторые кристаллографические формы получаются из других путем закономерного уменьшения числа их граней. Так, например, кубический тетраэдр может быть получен из октаэдра, если продолжить до взаимного пересечения его четыре непараллельные грани. При этом четыре другие грани октаэдра исчезнут. Такой подход к классификации кристаллических многогранников был особенно подробно развит в сочинениях немецких кристаллографов и минералогов — Х. С. Вейса (1780—1856), Ф. Мооса (1773—1839), К. Ф. Наумана (1797—1873). В русской литературе этого метода придерживался акад. Н. И. Кокшаров (1818—1892). Разработанная ими номенклатура, несмотря на все свое несовершенство, долгое время царила в кристаллографии.

В старых учебниках минералогии мы обычно встречаемся с ней. В отдельных кристаллографических системах последователи Наумана и Кокшарова различали голоэдрию (полногранность), соответствующую нынешним видам симметрии, наиболее богатым элементами симметрии, и мероэдрию (неполногранность). Последняя в свою очередь подразделялась на гемиэдрию и гемиморфию (уменьшение числа граней голо-

эдрических многогранников вдвое), тетартоэдрию (уменьшение граней вчетверо) и огдоэдрию (уменьшение числа граней в восемь раз). Все эти понятия устанавливались без всяких теоретических оснований, чисто опытным путем, как бы наощупь, исходя из наблюдений над формами кристаллов. В связи с этим, различными учеными признавалось различное число подразделений кристаллографических систем и даже различное число самих этих систем. Так, например, некоторое время считалось доказанным существование выдвинутой в 1826 г. Е. Митчерлихом диклиноэдрической системы с одним прямым углом и двумя косыми углами между кристаллографическими осями (система должна была стать промежуточной между моноклинной и триклинной сингониями).

Долгое время выводы Наумана и его последователей признавались за единственно правильные в кристаллографии. Вот как характеризует этот период в нашей науке Е. С. Федоров: „За Вейсом воцарился Науман, ставший как бы законодателем в области кристаллографии для всех стран и для всех школ. И, странно сказать, та в высшей степени несовершенная кристаллография, которая распространилась по всему миру авторитетом Наумана, признавалась везде как нечто непогрешимое и вечное. О бесплодности же ее мы можем судить по тому факту, что все, что было выработано теоретического и пользовалось более или менее общим признанием за это время (почти три четверти века), оказалось ошибочным и после столь неоспоримого господства как-то сразу рухнуло, почти без всяких следов“.[1]

Справедливость требует отметить, что катастрофа, постигшая учение Наумана и его последователей, почти не затронула научных заслуг и достижений знаменитого русского минералога, акад. Н. И. Кокшарова. Дело в том, что главнейшим трудом Кокшарова являются одиннадцатитомные

[1] Е. С. Федоров. Из итогов тридцатипятилетия. (Речь и отчет, читанные в годичном собрании Московского с.-х. института 26 сентября 1904 г.). М., 1904, стр. 10—11.

„Материалы для минералогии России" — богатейшая сводка непогрешимо точных кристаллографических данных для русских минералов, полученная путем скрупулезнейших гониометрических измерений. Этот труд сохраняет всю свою ценность и до сих пор. Перед ним отступают на второй план кокшаровские „Лекции по минералогии" (1863), где развивались наумановские воззрения на классификацию кристаллов. Кроме того, Н. И. Кокшаров один из первых обратил внимание на вывод тридцати двух видов симметрии А. В. Гадолина, дав ему самую высокую оценку.

Параллельно с линией Наумана, в кристаллографии XIX в. развивались прогрессивные идеи, давшие в конце концов основу для современной теоретической науки о кристаллах. Сюда в первую очередь относятся разработка теории строения кристаллов и развитие учения о их симметрии. Последнее привело к выводу совокупностей элементов симметрии для конечных фигур вообще и к выводу тридцати двух кристаллографических видов симметрии в частности.

Необходимо отметить выдающуюся роль русских ученых в развитии этого важнейшего отдела кристаллографии. Вывод тридцати двух видов симметрии кристаллов, получивший всемирное распространение и признание, принадлежит русскому академику А. В. Гадолину.[1] Вывод И.-Ф.-Х. Гесселя, относящийся к первой половине прошлого столетия, вследствие своей тяжеловесности и неуклюжести, в свое время прошел совершенно незамеченным и не сыграл абсолютно никакой роли в развитии мировой кристаллографии. Оригинальный вывод совокупностей элементов симметрии для всех без исключения конечных фигур, включая сюда и кристаллы, был дан Е. С. Федоровым,[2] не имевшим в то время понятии о за-

[1] А. В. Гадолин. Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала. 1867. (См. настоящую книгу).

[2] Е. С. Федоров. Начала учения о фигурах. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXI, 1885, стр. 1—279. Этот труд переиздан в 1953 г. в серии „Классики науки", Изд. АН СССР.

бытом труде Гесселя. В этом вопросе Федоров опередил знаменитого П. Кюри. К сожалению, вследствие задержки с печатанием федоровских „Начал", работа Кюри вышла на год раньше (1884). Федоров в своих статьях и особенно в письмах к А. Шенфлису неоднократно указывал на это обстоятельство, отстаивая свой приоритет. (Впоследствии, узнав о существовании работы Гесселя, он написал специальную статью, где воздает должное забытому ученому). Существенной заслугой Федорова следует считать то обстоятельство, что им впервые были даны алгебраические уравнения, характеризующие каждую отдельную совокупность элементов симметрии для конечных фигур.[1]

В 1897 г. Г. В. Вульф дал новый вывод видов симметрии, приняв за основной элемент симметрии плоскость симметрии, а за основную операцию — отражение. Исходя из этого, любая симметрическая операция конечных фигур может рассматриваться по результату как последовательное отражение не более чем в трех плоскостях. Это положение дало возможность просто и однородно выводить все элементы и операции симметрии для конечных фигур. (Впоследствии, в 1907 г. А. К. Болдырев обобщил его и на случай бесконечных фигур).

Из приведенных выше данных ясно, как много внесли русские кристаллографы в развитие учения о тридцати двух видах симметрии.

В 1891 г. в статье о книге Шенфлиса „Kristallsysteme und Kristallstruktur" Федоров писал по этому поводу следующее: „Как показывает заглавие этого сочинения, оно рассматривает только два вопроса кристаллографии: вопрос о системах симметрии и их подразделений и вопрос о правильных системах фигур или, употребляя термин самого автора, о пространственных группах, или, выражаясь еще

[1] Е. С. Федоров. Симметрия конечных фигур. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXV, 1889, стр. 1—52.

иначе и при том общепонятно, о возможных видах структуры кристаллов. Если не касаться работ Гесселя, до такой степени опередивших свое время, что они оставались непонятыми и потому почти неизвестными даже современникам, то первый вопрос прежде всего самым точным образом был исследован в России А. В. Гадолиным, второй вопрос вашим покорнейшим слугой.

„Таким образом, названное сочинение А. Шенфлиса, знаменующее для Западной Европы громадный шаг вперед, для России такового не представляет.

„Вообще в этой отрасли науки русская ученая литература значительно опередила литературу всех других стран“.[1]

Сделаем подробный обзор наиболее важных трудов, посвященных выводу видов симметрии кристаллов. Обзор будем вести в хронологическом порядке.

Как уже указывалось выше, первый вывод всех важнейших совокупностей элементов симметрии для всех конечных фигур принадлежит И.-Ф.-Х. Гесселю (1796—1872) — профессору минералогии и пробирного искусства в Марбургском университете.

Статья Гесселя была напечатана в 1830 г. в „Физическом словаре“.[2] Здесь впервые рассматривался вопрос о числе и порядке расположения равных частей в симметричных телах. Иначе говоря, работа Гесселя содержит вывод законов симметрии, относящихся ко всем конечным фигурам, а в частности, и к кристаллам. Упомянутые законы соответствуют совокупностям операций симметрии, известным в математике под названием „точечных групп“. Часть таких групп, возможных в кристаллических многогранниках, отвечает тридцати двум видам симметрии.

---

[1] Е. С. Федоров. По поводу появившегося сочинения Шенфлиса по теоретической кристаллографии. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXVIII, 1891, стр. 515.

[2] I.-F.-Ch. Hessel. Krystallometrie, oder Krystallonomie und Krystallographie. Gehler's physikalisches Wörterbuch, Bd. 5, 1830.

Своеобразная номенклатура Гесселя, „тяжелый язык и несовершенный метод“ [1] изложения, громоздкость избранного им метода и отсутствие сопоставлений с природными объектами привели к тому, что его сочинения остались совершенно неизвестными среди ученых того времени. Этому содействовала также поразительная, по словам Е. С. Федорова, неподготовленность большинства минералогов к восприятию идей, имеющих математическую подкладку.

В 1868 г. Гессель еще раз развивает в специальной работе свои взгляды на симметрию многогранников, иллюстрируя их изображениями. Однако и этот труд остается незамеченным. Лишь в 1890 г., через восемнадцать лет после смерти ученого и через шестьдесят лет после появления его первой статьи, Л. Зонке заново открывает забытые работы Гесселя.

Переходя к краткому изложению теории Гесселя, следует прежде всего подчеркнуть ее общегеометрическое значение. Вывод его отнюдь не ограничивается одними кристаллическими многогранниками. Последние рассматриваются им лишь как частный случай геометрических фигур. Говоря о расположении и форме граней многогранников, Гессель в первую очередь останавливается на понятиях совместимо-равных (ebenbildlichgleich) и зеркально-равных фигур (gegenbildlichgleich) и характеризует их соответственно математическими символами: $\cong$, $|=|$. В том случае, если фигуры одновременно и совместимо и зеркально равны, дается символ $|\cong|$.

Центральную часть статьи Гесселя „Кристалл“ занимает решение основного вопроса о числе и порядке расположения равных частей (граней), могущих образовать пространственную фигуру (многогранник). При этом учитывается, что зеркально-равные части не должны обязательно занимать отраженно-равные положения относительно друг друга.

При изложении вышеуказанного вопроса основную роль играет понятие оси. Приведем относящееся сюда определение

[1] Е. С. Федоров. О сочинениях немецкого минералога Гесселя. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXVII, 1891, стр. 462.

Гесселя: „Тело, имеющее *p* равноценных положений по отношению к нормали, проведенной через центр тела к его горизонтальному сечению, называется *p*-членным, а сама эта нормаль *p*-членной осью“. Под равноценными положениями тела здесь разумеются неотличимые друг от друга положения, в которые данное тело может приводиться поворотами и поворотами, связанными с отражениями, вокруг *p*-членной оси. Под горизонтальным сечением Гессель понимает особенное, не имеющее себе равных, сечение *p*-членного тела.

Отметим, что такое определение шире принятого нами сейчас понятия об „оси симметрии“, так как сюда подходят не только простые, но и зеркально-поворотные, или инверсионные, оси симметрии, а как известно, и те и другие полностью исчерпывают все возможные элементы симметрии для конечных фигур. Плоскость симметрии есть зеркально-поворотная ось первого порядка, центр инверсии — зеркально-поворотная ось второго порядка. Универсальное определение Гесселя ставит его работу гораздо выше позднейших мемуаров О. Браве, где автор не дает единого определения для всех элементов симметрии, а лишь перечисляет их.

Вместе с тем определение Гесселя поражает нас своей тяжеловесностью. По своей старинной громоздкости *p*-членная ось Гесселя несколько напоминает наивные попытки ученых начала прошлого столетия, стремившихся внести единство в других областях науки. Таков, например, „архетип“ зоолога Р. Оуэна (1804—1892) — теоретически вымышленное ископаемое животное, из скелета которого можно было вывести скелеты всех без исключения позвоночных. Сюда же относится „универсальное растение“, сконструированное В. Гете, своего рода „архетип растений“. Все эти попытки родственны между собой, все они связаны с мучительными поисками „единого плана“ в природе. Однако вымышленные универсальные животные и растения давно сданы в архив, тогда как геометрическое построение Гесселя может быть использовано и сейчас. Оси, совпадающие с отрезками пря-

мых, проходящих через центральную точку конечного тела, рассматриваются Гесселем в отношении обоих концов таких отрезков. С этой точки зрения они разбиваются на две группы: 1) равноконечные (два одинаковых конца) и 2) неравноконечные (два разных конца).

Помимо этого, случаи совпадения или несовпадения осей с плоскостями симметрии (по современной терминологии), а также наличие или отсутствие плоскостей симметрии, перпендикулярных осям, влекут за собой особые названия осей. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно:

а) p-членная ось, не лежащая в плоскости симметрии, называется простой p-членной осью;

б) p-членная ось, лежащая в плоскости симметрии, называется удвоенной p-членной осью;

в) ось, не имеющая перпендикулярной к ней плоскости симметрии, называется неодинаково стоящей осью (в отношении обоих концов);

г) ось, имеющая перпендикулярную к ней плоскость симметрии, называется осью с прямо поставленными концами;

д) p-членная ось называется осью с повернутыми вокруг себя концами, если возле одного конца ее расположение граней выводится из расположения граней вокруг другого ее конца путем разделения тела плоскостью, проходящей через центр перпендикулярно к оси, и поворотом вокруг оси одной из полученных половин на угол $\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{p}$.

В результате характер оси, согласно Гесселю, может отвечать лишь одному из следующих семи случаев:

Неравноконечная ось	1) простая p-членная	
	2) удвоенная p-членная	
Равноконечная ось	с прямо поставленными концами	3) простая
		4) удвоенная
	с повернутыми вокруг себя концами	5) простая
		6) удвоенная
	совместимо-равная с двух концов	7) простая

Восьмой мыслимый случай, отвечающий равноконечной — неодинаково стоящей совместимо-равной дважды *p*-членной оси, совпадает с четвертым случаем.

Легко сообразить, как относятся семь характерных разновидностей Гесселя к порождающим элементам симметрии, на которых базируется современный вывод видов симметрии.

Пользуясь терминами номенклатуры Федоровского института, легко согласовать типы осей Гесселя с видами симметрии кристаллических многогранников.

Так, первый случай Гесселя отвечает примитивным видам симметрии, второй — планальным, третий — центральным в случае четного и гироидо-примитивным в случае нечетного, четвертый — планаксиальным, пятый — гироидо-примитивным, шестой — гироидо-планальным и седьмой — гироидо-аксиальным видам симметрии.

Ясно, что одна и та же геометрическая фигура может обладать различными осями. Пусть осью наивысшего порядка (главной осью) будет ось порядка *p*. Здесь мыслимы два случая: либо *p*-членная ось является единственной главной (все остальные оси отвечают меньшим порядкам), либо присутствует несколько одинаковых *p*-членных осей.

С этой точки зрения геометрические фигуры подразделяются на две категории:

1) главноосные фигуры, обладающие одной главной осью;
2) фигуры с отсутствующей главной осью.

Для геометрических фигур первой категории *p* может иметь любые целые значения. Исходя из основного закона кристаллографии — закона рациональности параметров, которому Гессель придает своеобразную трактовку „закона параллелограмма лучей“ (Gerengesetz), выводится возможность наличия в кристаллах относительно их огранения лишь осей 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков. Отсюда получаем ряд случаев, отвечающих главноосным фигурам в кристаллографии.

С первого взгляда может показаться, что сумма таких случаев отвечает тридцати пяти, так как пять родов осей, возможных в кристаллах, следует помножить на семь, соответственно числу возможных осей, выведенных Гесселем. Однако легко убедиться в том, что некоторые из полученных таким образом случаев совпадают друг с другом или же являются невозможными в кристаллографии. В качестве примера рассмотрим семь случаев, соответствующих одночленной оси.

1) Неравноконечная простая одночленная ось. Этот случай отвечает отсутствию элементов симметрии. (Триклинная сингония — примитивный вид симметрии).

2) Неравноконечная удвоенная одночленная ось. Здесь появляется единственная плоскость симметрии, идущая вдоль оси. (Моноклинная сингония, планальный вид симметрии).

3) Равноконечная, одинаково стоящая, с двух концов простая одночленная ось. В этом случае появляется единственная плоскость симметрии, перпендикулярная оси. Но вследствие того, что ось 1-го порядка равнозначна отсутствию оси, приходим к результату, идентичному с предыдущим.

4) Равноконечная, одинаково стоящая, с двух концов удвоенная одночленная ось. Здесь имеем две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии: одна из них идет вдоль оси, другая перпендикулярна ей. На пересечении обеих плоскостей появляется двойная ось. В связи с этим, данный случай следует отнести к ряду, соответствующему двучленным осям. Таким образом, из рассматриваемой серии случаев он выпадает и появляется в случае неравномерной удвоенной двучленной оси. (Ромбическая сингония, планальный вид симметрии).

5) Равноконечная, неодинаково косо стоящая, с обоих концов простая одночленная ось. Здесь обе части фигуры соответствуют двум ее половинам, разделенным горизонтальной плоскостью и повернутым вокруг вертикальной оси на угол $\frac{2\pi}{2p} = 180^\circ$. Этот случай отвечает присутствию центра

инверсии, соответствующего двойной зеркально-поворотной оси, или инверсионной оси 1-го порядка. (Триклинная сингония, центральный вид симметрии).

6) Равноконечная, неодинаково косо стоящая, с обоих концов удвоенная одночленная ось. Наличие плоскости симметрии и одновременно центра инверсии влечет за собой появление двойной оси, перпендикулярной к плоскости симметрии. Тем самым данный случай переводится в ряд двучленной оси, отвечая равноконечной одинаково стоящей, с двух концов простой двучленной оси. (Моноклинная сингония, планаксиальный вид симметрии).

7) Неодинаково стоящая, совместимо равная с двух концов простая одночленная ось. Совместимость обоих концов влечет за собой появление двойной оси, перпендикулярной к исходной одночленной оси. Таким образом, этот случай отвечает одной двойной оси, отвечая по классификации Гесселя случаю неравноконечной простой двучленной оси. (Моноклинная сингония, аксиальный вид симметрии).

Итак, из семи разобранных случаев четыре отпадают. В результате находим всего три случая, относящихся к ряду $p=1$.

При $p=2$ и $p=3$ будут все семь случаев. (Следует иметь в виду, что при $p=2$ случаи пятый и шестой отвечают наличию четверной инверсионной, или зеркально-поворотной, оси).

В обоих рядах, соответствующих $p=4$ и $p=6$, выпадают случаи пятый и шестой (равноконечные, косо стоящие с двух концов оси). При $p=4$ эти случаи отвечают восьмерной, а при $p=6$ — двенадцатикратной инверсионной, или зеркально-поворотной, осям. Невозможность присутствия подобных осей в кристаллических телах заставляет вычеркнуть все эти четыре случая. Следовательно, из тридцати пяти случаев с главноосными фигурами необходимо вычеркнуть всего восемь. В результате остается двадцать семь случаев. Заканчивая обзор случаев с одной главной осью, приведем

в качестве примера полный список семи случаев для $p=4$ по номенклатуре Гесселя параллельно с названиями, принятыми Федоровским институтом:

1) Неравноконечная простая четырехчленная ось.	Тетрагональная сингония, примитивный вид симметрии (G_4).
2) Неравноконечная дважды четырехчленная ось.	Тетрагональная сингония, планальный вид симметрии ($G_4 4P$).
3) Равноконечная, одинаково стоящая, с обоих концов простая четырехчленная ось.	Тетрагональная сингония, центральный вид симметрии (G_4PC).
4) Равноконечная, одинаково стоящая, с обоих концов дважды четырехчленная ось.	Тетрагональная сингония, планаксиальный вид симметрии ($G_4 4G_2 5PC$).
5) Равноконечная, неодинаково косо стоящая, с двух концов простая четырехчленная ось (нижняя часть фигуры повернута относительно верхней оси на угол $\frac{2\pi}{2\times 4}=45^\circ$).	Октогональная сингония, примитивный вид симметрии (G_8). Этот случай в кристаллографии невозможен.
6) Равноконечная, неодинаково косо стоящая, с двух концов удвоенная четырехчленная ось.	Октогональная сингония, планальный вид симметрии ($G_8 8P$). Случай, опять-таки, невозможный в кристаллографии.
7) Равноконечная, неодинаково стоящая, совместимо равная с двух концов четырехчленная ось.	Тетрагональная сингония, аксиальный вид симметрии ($G_4 4G_2$).

Итак, за исключением случаев пятого и шестого, невозможных в кристаллографии, здесь выводится пять видов симметрии, относящихся к тетрагональной сингонии. Напомним, что тетрагироидо-примитивный (Gi_4) и тетрагироидо-планальный ($Gi_4 2G_2 2P$) виды симметрии, принадлежащие к той же сингонии, выводятся при $p=2$ (случаи пятый и шестой).

Фигуры, не содержащие главной оси, обладают несколькими равными p-членными осями. Не касаясь вывода, ознакомимся лишь с его результатами. Прежде всего доказывается, что в таких фигурах могут присутствовать p-членные оси 3-го,

4-го и 5-го порядков. Последние, согласно кристаллографическому закону рациональности параметров, исключаются.

При $p=4$ различаем два случая:

1) три взаимно перпендикулярные, равноконечные равностоящие удвоенные четырехчленные оси, сопровождаемые четырьмя равноконечными, косо стоящими, с обоих концов удвоенными трехчленными осями, расположенными вдоль телесных диагоналей куба (кубическая сингония, планаксиальный вид симметрии — $3G_4 4G_3 6G_2 9PC$);

2) три взаимно перпендикулярные, равноконечные, совместимо равные простые четырехчленные оси, сопровождаемые равными простыми трехчленными осями, расположенными вдоль телесных диагоналей куба (кубическая сингония, аксиальный вид симметрии — $3G_4 4G_3 6G_2$).

При $p=3$ имеем три случая:

1) четыре неравноконечные дважды трехчленные оси, сопровождаемые тремя взаимно перпендикулярными, косо стоящими, равноконечными удвоенными двучленными осями (кубическая сингония, планальный вид симметрии — $3Gi_4 4G_3 6P$);

2) четыре неравноконечные простые трехчленные оси, сопровождаемые тремя взаимно перпендикулярными, совместимо равноконечными простыми двучленными осями (кубическая сингония, примитивный вид симметрии — $3G_2 4G_3$);

3) четыре равноконечные, косо стоящие простые трехчленные оси, сопровождаемые тремя взаимно перпендикулярными, равностоящими и равноконечными удвоенными двучленными осями (кубическая сингония, центральный вид симметрии — $3G_2 4G_3 3PC$).

В результате имеем всего 5 случаев для кристаллографических фигур, не обладающих главными осями.

Складывая их с двадцатью семью случаями с главными осями, получаем всего тридцать два случая, возможных в кристаллографии.

Следует отметить, что в работе Гесселя это число не упоминается. В таблице, обобщающей все случаи, приводится

всего тридцать шесть подразделений. Однако около четырех из них имеются оговорки, согласно которым данное подразделение является идентичным с другим, помещенным в таблице. (Сюда относятся все четыре случая, отмеченные нами для $p = 1$).

Приведенный краткий обзор касается лишь вопроса о симметрии конечных фигур, который затронут в работе Гесселя. Вся его статья занимает более 300 страниц и представляет обширный обзор современной автору кристаллографии.

Как уже указывалось, рассмотренное выше сочинение Гесселя в свое время осталось совершенно незамеченным и не повлияло на развитие кристаллографии.

В 1849 г. бывший морской офицер, впоследствии профессор астрономии и физики в Парижской политехнической школе, Август Браве (1811—1863) дал новый вывод законов симметрии для конечных геометрических фигур в мемуаре „Исследование о многогранниках симметричной формы“.[1] Стройность и вместе с тем простота изложения привлекли широкое внимание кристаллографов и минералогов к этому труду. Достаточно сказать, что основные определения этой работы Браве с небольшими изменениями нередко повторяются и до сих пор в учебниках и руководствах по кристаллографии. В качестве иллюстрации приведем определение центра симметрии (инверсии) по Браве: „Центром симметрии многогранника называется такая точка C, соединив которую с некоторой вершиной S и продолжив CS на равное расстояние, получим точку S', также являющуюся вершиной многогранника. Точка S' является гомологичной к S по отношению к центру C“.

Столь же привычно для нас звучат и определения оси и плоскости симметрии.

Коренным недостатком этой работы Браве является не исчерпывающее определение симметричной фигуры: „Сим-

[1] A. Bravais, Journ. de math. pures et appl., 14, 1849, стр. 137. Перевод Я. В. Самойлова см. в: Вестн. опытн. физ. и элем. матем., Одесса, 1869.

метричным многогранником называется такой многогранник, который обладает либо центром симметрии, либо одной или несколькими осями симметрии, либо одной или несколькими плоскостями симметрии. Многогранник без центра, осей и плоскостей симметрии является асимметричным".

Как видим, набор элементов симметрии, перечисленных Браве, является неполным: в нем отсутствуют зеркально-поворотные, или инверсионные, оси. Последнее не могло не отразиться на результатах вывода, в котором отсутствуют гироидо-примитивные виды симметрии с одной четной зеркально-поворотной, или инверсионной, осью. Следует отметить, что в своем первом мемуаре Браве совершенно не касается кристаллографических фигур. Сделанные им выводы, так же как и у Гесселя, относятся ко всем без исключения геометрическим многогранникам. Принцип вывода совокупностей элементов симметрии близок к практикуемым и сейчас в учебной литературе методам.

При выводе Браве подразделяет все многогранники на следующие четыре класса:

1) асимметричные многогранники;
2) симметричные многогранники без осей;
3) симметричные многогранники с главной осью:
   а) четного порядка,
   б) нечетного порядка;
4) симметричные многогранники сфероэдрические, обладающие осями, в которых ни одна не является главной:
   а) четырежды тройные (кватертерные) многогранники с четырьмя тройными осями,
   б) десятикратно тройные (децемтерные) многогранники с десятью тройными осями.

Далее приводится ряд теорем, относящихся к сложению элементов симметрии. Большинство из них теперь хорошо известно нам по современным курсам элементарной геометрической кристаллографии. Вот некоторые из них:

Теорема IV. В многограннике с центром и плоскостью симметрии нормаль к этой плоскости, проведенная через центр, является осью симметрии четного порядка.

Теорема V. При наличии двух плоскостей симметрии в многограннике линия их пересечения является осью симметрии.

На основании двух вышеприведенных теорем выясняется, что симметричные могогранники без осей могут иметь лишь центр или одну плоскость симметрии.

По обозначению Браве:

1) OL, C, OP, ...

2) OL, OC, P, ...

Попутно отметим, что и обозначения Браве, принятые им для элементов симметрии (L — ось, C — центр симметрии, P — плоскость симметрии), прочно вошли в литературу и до последнего времени являлись наиболее употребительными.

Соответственные хорошо знакомые нам теоремы даются и при выводе симметричных многогранников с главной осью. Например, число двойных осей, перпендикулярных главной оси Λ^q, равно O или q; или число плоскостей симметрии, проходящих вдоль главной оси Λ^q, равно O или q.

Учитывая следствия теорем, легко вывести различные законы симметрии для многогранников. С этой целью Браве к исходной главной оси добавляет в отдельности: центр симметрии, перпендикулярные к главной оси двойные оси, плоскости симметрии, идущие вдоль нее. Наконец, одновременно добавляются и плоскости симметрии, идущие вдоль главной оси, и плоскости, перпендикулярные к ней, и, кроме того, перпендикулярные к главной оси двойные оси симметрии. В последнем случае различаем две возможности: либо двойные оси совпадают с вертикальными плоскостями симметрии, либо они проходят вдоль диагоналей между этими плоскостями.

Таким образом, для многогранников с главной осью четного наименования (Λ^{2q}) получаем нижеследующие совокупности элементов симметрии:

3) Λ^{2q}, OL^2, OC, OP;

4) Λ^{2q}, OL^2, C, П*;
5) Λ^{2q}, qL^2, qL^2_1, OC, OP;
6) Λ^{2q}, OL^2, OC, qP, qP_1;
7) Λ^{2q}, qL^2, qL^2_1, C, П, qP, qP_1;
8) Λ^{2q}, $2qL^2$, OC, $2qP$.

Соответственные законы симметрии для многогранников с главной осью нечетного наименования (Λ^{2q+1}) отвечают следующим совокупностям:

9) Λ^{2q+1}, OL^2, OC, OP;
10) Λ^{2q+1}, OL^2, C, OP;
11) Λ^{2q+1}, OL^2, OC, П;
12) Λ^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, OC, OP;
13) Λ^{2q+1}, OL^2, OC, $(2q+1)P$;
14) Λ^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, C, $(2q+1)P$;
15) Λ^{2q+1}, $(2q+1)L^2$, OC, П, $(2q+1)P$.

Ряд теорем, относящихся к сфероэдрическим многогранникам, который мы здесь опускаем, позволяет вывести следующие пять классов для четырежды тройных многогранников:

16) $4L^3$, $3L^2$, OC, OP;
17) $4L^3$, $3L^2$, C, $3P$;
18) $4L^3$, $3L^2$, OC, $6P$;
19) $3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, OC, OP;
20) $3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P$, $6P_1$.

Десятикратно тройные сфероэдрические многогранники отвечают следующим классам:

21) $6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, OC, OP;
22) $6L^5$, $10L^3$, $15L^2$, C, $15P$.

Итак, полное число всех выведенных классов симметрии отвечает двадцати двум. Сюда же следует добавить двадцать третий случай многогранника, лишенного каких-либо элементов симметрии (OL, OC, OP).

Всего, согласно Браве, получается двадцать три класса симметрии. Необходимо иметь в виду, что в один такой

* П — плоскость симметрии, перпендикулярная главной оси.

класс может входить множество видов симметрии с различными значениями q. Вследствие отсутствия среди принятых во внимание элементов симметрии инверсионных, или зеркально-поворотных, осей, в перечне классов отсутствуют виды симметрии с одной четной инверсионной осью типа G_i^{4q} ($G_i^{2(2q+1)}$ присутствуют в виде простых осей вдвое меньшего наименования, при наличии перпендикулярной им плоскости Λ^{2q+1},П. Нечетные инверсионные оси также присутствуют в качестве простых осей того же наименования с присоединением центра симметрии Λ^{2q+1}, C).

Еще раз напомним, что разобранный нами первый мемуар Браве касается лишь геометрических многогранников. О симметрии кристаллов здесь не сказано ни слова.

Интересующие нас сведения по этому вопросу затрагиваются во втором мемуаре Браве „О системах, образованных точками, правильно распределенными на плоскости и в пространстве“.[1] Эта работа, как известно, легла в основу последующих представлений о кристаллографическом строении, наиболее полно развитых в конце прошлого века Е. С. Федоровым. Здесь впервые вводится в кристаллографии понятие „пространственной решетки“ под названием „системы точек, правильно распределенных в пространстве“.

Напомним, что такие точки располагаются по вершинам параллелепипедов, нацело заполняющих пространство, будучи равными, параллельно ориентированными и смежными по целым граням.

В этом мемуаре Браве приводится следующая теорема:

„Решетка может обладать лишь двойными, тройными, четверными или шестерными осями симметрии“.[1] Доказательство ведется по способу, обычно применяемому и сейчас в курсах элементарной кристаллографии.

Приведем соответственную выдержку: „Значения $q = 5$ и > 6, разумеется, невозможны, так как всегда можно пред-

---

[1] A. Bravais, Journ. de l'école polytechn., 19, 1850, стр. 1.

полагать, что M (узел решетки) был взят на минимальном расстоянии от оси поворота. Следовательно, неравенство $Om < OM'$ невозможно, за исключением того случая, когда $Om = 0$, так как при этом O является узлом решетки".

В дальнейшем, классифицируя четырнадцать различных типов пространственных решеток, Браве подробно останавливается на симметрии их параллелепипедов. В результате он выводит семь следующих систем:

Решетки	Символ симметрии
1) Трижды четверные	$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P$, $6P_1$
2) Шестерные	Λ^6, $3L^2$, $3L_1^2$, C, Π, $3P$, $3P_1$
3) Четверные	Λ^4, $2L^2$, $2L_1^2$, C, Π, $2P$, $2P_1$
4) Тройные	Λ^3, $3L^2$, C, $3P$
5) Трижды двойные	Λ^2, L^2, L_1^2, C, Π, P, P_1
6) Двойные	Λ^2, C, P
7) Асимметричные	OL, C, OP

Следует оговориться, что в этом мемуаре, оказавшем столь значительное влияние на развитие кристаллографии, понятие о решетке трактуется лишь как чисто геометрическое.

Непосредственно к кристаллам Браве обращается в двух специальных кристаллографических этюдах (1849).[1] Затрагиваемому нами вопросу посвящен второй из них. Здесь поднимается вопрос о симметрии молекул, слагающих кристаллическое тело (в предыдущих работах рассматривалось лишь пространственное расположение центров тяжестей молекул). При этом выдвигается гипотеза, согласно которой молекулы имеют форму многогранников. Предполагается, что из числа семи кристаллических систем молекулы данного вещества при кристаллизации избирают ту, в которой наибольшее количество элементов симметрии совпадает с элементами симметрии самих молекул.

[1] A. Bravais, Journ. de l'école polytechn., 20, 1851.

Симметрия молекулярных многогранников может соответствовать любому из классов симметрии, выведенных Браве в его статье о симметричных многогранниках (т. е. любой точечной группе).

Вместе с тем, в решетке могут присутствовать лишь двойные, тройные, четверные и шестерные оси.

Следовательно, другие оси, принадлежащие молекулам, могут рассматриваться как асимметричные линии, не влияющие на общую симметрию кристалла.

В связи с этим на первое место выдвигается общая симметрия для молекулярного многогранника и кристаллической решетки, в которую он входит.

При этом вводится понятие о многограннике, эквивалентном молекулярному многограннику, лишенному всех элементов симметрии, не принадлежащих решетке, в которой он кристаллизуется. В конце статьи Браве имеется таблица, где приводятся совокупности элементов симметрии для эквивалентных многогранников. Эти совокупности и отвечают известным нам кристаллографическим видам симметрии.

Однако их у Браве не тридцать два, а тридцать один, вследствие отсутствия вида симметрии с единственной инверсионной (зеркально-поворотной) осью четверного порядка. Характерно, что в таблице, дающей число граней кристаллических форм в разных системах, это упущение автором учтено. Кристаллические формы здесь подразделены на классы по симметрии молекулярного (эквивалентного) многогранника. Среди символов симметрии в четверной (тетрагональной) системе находим Λ^2, *OC*, *OP*. В относящейся сюда сноске читаем: „Этот многогранник может кристаллизоваться в четверной системе лишь при соблюдении определенных условий“.

В предшествующем тексте упомянутые условия охарактеризованы следующим образом: „Возможно, что в природе встретится молекулярный многогранник, равнозначные вершины которого распределяются по четыре вокруг двойной центральной оси...“.

Итак, заканчивая свои кристаллографические этюды, Браве отдавал себе отчет в сделанном им первоначальном упущении.

Однако он не дал отдельного списка кристаллографических видов симметрии. Некоторые из видов, в связи с своеобразным способом их вывода, повторяются по несколько раз. Само число 32 нигде не подчеркивается.

Последний мемуар Браве имел гораздо меньший успех и распространение, чем его первые статьи. Гипотетичность молекулярных многогранников, туманное определение выводящихся совокупностей элементов симметрии, общих и для молекулярного многогранника и для решетки, — все это не могло не повлиять на малую популярность произведения. Позднейшими авторами лишь подчеркивается неполнота определения симметричной фигуры в „Мемуаре о симметричных многогранниках". По этому поводу Е. С. Федоров пишет: „Современник Гесселя, Браве настолько не имел представления о его труде, что сделал заведомый шаг назад, так как не мог даже сделать ясного вывода видов симметрии кристаллов. В труде Браве не дано ответа на самый первый вопрос учения о симметрии: что такое элемент симметрии?".[1]

Еще через двадцать лет, в 1867 г., появляется „Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала" русского ученого А. В. Гадолина. Эта замечательная работа с течением времени завоевала себе всемирное признание и составила эпоху в развитии кристаллографии и минералогии.

А. В. Гадолин (1828—1892) не являлся специалистом — кристаллографом и минералогом. Свое образование он закончил в Михайловском артиллерийском училище. Как любитель-минералог, он оставил несколько работ, относящихся к описательной минералогии. Занятия минералогией и натолк-

---

[1] Е. С. Федоров. Из итогов тридцатипятилетия. М., 1904, стр. 11.

нули его на вопросы теоретической кристаллографии. Математическая обработка последних и нашла свое выражение в знаменитом „Выводе“. Характерно, что разработка вопросов теоретической кристаллографии впоследствии привела Гадолина к исследованию сил сцепления и других физических явлений, зависящих от этих сил. Результаты произведенных исследований легли в основу его работ, касающихся сопротивления стен орудий давлению пороховых газов, внутреннего натяжения в орудийных стволах и пр. Таким образом, занятия теоретической кристаллографией дали толчок к решению задач, имевших важное военное значение.

В своем „Выводе“, сделанном совершенно независимо от предшествовавших авторов, Гадолин, в отличие от них, касается не любых геометрических конечных фигур, а лишь многогранников, возможных в кристаллографии.

Несколько сузив геометрическую задачу, наш автор вместе с тем сделал свой труд более доступным для кристаллографов и минералогов. Особенно важно отметить, что свои теоретические высказывания Гадолин иллюстрировал примерами из минералогии. Тем самым сразу выявилось практическое значение его труда. Все это и привело впоследствии к всеобщему принятию и признанию его вывода как основы для классификации кристаллических многогранников.

Ознакомившись с классическим произведением А. В. Гадолина, читатель сам сможет оценить исключительную простоту и изящество выводов ученого. Здесь мы приведем лишь названия тридцати двух видов симметрии по Гадолину параллельно с соответственными совокупностями элементов симметрии. Звездочками отмечены те виды симметрии, природные представители которых во время Гадолина еще не были известны.

I. Правильная (кубическая) система

1. Голоэдрия — $C3G_4 4G_3 6G_2 9P$.
2. Попеременно-плоскостная гемиэдрия — $3G_4 4G_3 6G_2$.
   Тетраэдрическая гемиэдрия — $3Gi_4(3G_2) 4G_3 6P$.

4. Додекаэдрическая гемиэдрия — $C3G_24G_33P$.
5. Тетартоэдрия — $3G_24G_3$.

II. Квадратная (тетрагональная) система

6. Голоэдрия — CG_44G_25P.
7. Трапецоэдрическая гемиэдрия — G_44G_2.
8. Сфеноидальная гемиэдрия — $Gi_4(G_2)2G_22P$.
9. Пирамидальная гемиэдрия — CG_4P.
10. Сфеноидальная тетартоэдрия — $Gi_4(G_2)$*.
11. Гемиморфия голоэдрических форм — G_44P*.
12. Гемиморфия пирамидальной и трапецоэдрической гемиэдрии — G_4*.

III. Гексагональная система

13. Голоэдрия — CG_66G_27P.
14. Трапецоэдрическая гемиэдрия — G_66G_2.
15. Ромбоэдрическая гемиэдрия — CG_33G_23P.
16. Пирамидальная гемиэдрия — CG_6P.
17. Тригонотипная гемиэдрия — $G_3\,(Gi_6)\,3G_24P$*.
18. Ромбоэдрическая тетартоэдрия — $CG_3\,(Gi_3)$.
19. Трапецоэдрическая или тригональная тетартоэдрия — G_33G_2.
20. Пирамидальная тетартоэдрия — $G_3\,(Gi_6)\,P$*.
21. Гемиморфия голоэдрических форм — G_66P.
22. Гемиморфия трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии — G_6*.
23. Гемиморфия ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдрии — G_33P.
24. Гемиморфия всех тетартоэдрий — G_3*.

IV. Ромбическая система

25. Голоэдрия — $C3G_23P$.
26. Сфеноидальная симметрия — $3G_2$.
27. Гемиморфия голоэдрических форм — G_22P.

V. Моноклиноэдрическая (моноклинная) система

28. Голоэдрия — CG_2P.
29. Гемиэдрия — P*.
30. Гемиморфия — G_2.

VI. Триклиноэдрическая (триклинная) система

31. Голоэдрия — C.
32. Гемиэдрия — —.

Выход в свет работы Гадолина обратил на себя внимание крупнейших специалистов. Из русских ученых ее высоко оценил знаменитый наш минералог акад. Н. И. Кокшаров. На основании его отзыва Академия Наук присудила А. В. Гадолину Ломоносовскую премию.

Восторженный отзыв о труде русского кристаллографа дал известный английский ученый Миллер, с именем которого связаны применяющиеся в настоящее время кристаллографические символы. Ниже приводим отрывок из этого отзыва:[1]

„Многие минералоги, совершенно знакомые с фактами, касающимися кристаллов, не успели еще оценить в достаточной мере всю важность общих математических выражений для законов кристаллической симметрии; что же касается до геометров и аналитиков, то они слишком исключительно заняты отвлеченными величинами и потому мало заботятся о вопросах, касающихся симметрии и положения плоскостей кристаллов.

„Автор мемуара [А. В. Гадолин] избежал, повидимому, обоих этих недостатков; он выказывает совершенное знание натуральных кристаллов и, вместе с тем, ясно усматривает в них истины геометрические. Обладая подобными качествами, в труде, им предпринятом, он сумел представить законы кристаллической симметрии с удивительной ясностью.

„Замечательно, что его метода рассмотрения привела его к принятым à priori видам гемиэдрии, относительно которых в кристаллах призматической системы были сделаны ошибочные предположения, и все это оправдалось последними наблюдениями г. Деклуазо в гармотоме и вольфраме“.[1]

Из позднейших оценок наибольший интерес представляют отзывы о труде А. В. Гадолина, принадлежащие двум корифеям нашей науки — акад. Е. С. Федорову и акад. В. И. Вернадскому. Вот что писал Е. С. Федоров:[2] „Как автор «Вывода

[1] Е. С. Федоров. Некролог и список сочинений А. В. Гадолина. Изв. Геол. ком., 1893, стр. 1.

[2] Там же.

всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала» А. В. Гадолин приобрел бессмертное имя; выведенные им 32 вида симметрии в кристаллах легли в основу всего современного учения по теоретической кристаллографии, их будут учить наши правнуки и праправнуки. Нет нужды, что в настоящую минуту есть еще немало минералогов, не успевших понять и освоиться с значением этого вывода, и что вообще вывод этот пользуется еще довольно малой известностью. Со времени его опубликования минуло четверть столетия относительной косности, но теперь эта косность доживает свои последние минуты...

„Гадолин положил в основание своего вывода закон рациональности отношений параметров.

„Это — закон, находящийся в полном соответствии со всеми опытными данными, и, что самое главное, получивший всеобщее признание. Вот почему всякие выводы, которые с полной строгостью могут быть из него получены, невольно возбуждают полное и безусловное доверие.

„Но из этого закона вытекают, по отношению к элементам симметрии, совершенно определенные и недвусмысленные следствия, а именно то, что закон этот удовлетворяется, если грани кристалла связаны двойною, тройною, четверною или шестерною осью симметрии (по Гадолину, осью совмещения), но не удовлетворяется в случае пятерной оси или оси наименования высшего чем 6. Закон этот удовлетворяется, если грани связаны плоскостью симметрии, или сложной симметрией, если ось последней имеет наименование 2, 4 или 6 (по Гадолину, закон параллельности и сфеноидальная симметрия), и не удовлетворяется в случае оси сложной симметрии высшего наименования.

„Поэтому вид симметрии кристалла может обусловиться только перечисленными элементами и количество таких видов получается весьма ограниченное. Из бесконечного множества геометрически возможных видов симметрии, кристаллографическое значение имеют только те 32 вида, элементы которых

состоят из двойных, четверных и шестерных осей сложной симметрии. Первое исчерпывающее изложение этого предмета и составляет истинную и главную заслугу покойного Гадолина".

Приведем отрывок из статьи В. И. Вернадского,[1] посвященной памяти акад. Н. И. Кокшарова и одновременно памяти А. В. Гадолина:

„Изучая свойства кристаллических многогранников, Гадолин подметил общие принципы деления этих многогранников на классы по явлениям симметрии, какие наблюдаются в этих многогранниках по отношению к определенным линиям, точкам, плоскостям пространства. Он нашел этим путем общие положения симметрии и вывел, что возможны 32 определенных класса многогранников; из явлений симметрии он вычислил и все свойства этих многогранников. Когда он сравнил эти теоретически выведенные им группы со всеми формами кристаллов, наблюдавшимися во всех веществах, то оказалось, что все кристаллы без исключения уложатся в 20 с небольшим из теоретически возможных и им предвычисленных групп. С тех пор наблюдались еще некоторые новые формы и все кристаллы распадаются на 24—28 групп, которые все совпадают с 32 группами, вычисленными Гадолиным; здесь, следовательно, возможно предсказание. Но значение этого деления гораздо более глубокое. Гадолину удалось принять такие общие признаки, которые являются самыми отвлеченными и сохраняют все свое значение, когда мы от геометрических форм перейдем к изучению любых физических свойств кристаллов, будут ли то свойства световые, тепловые, или какие-либо иные. Из изучения общих принципов геометрии наружных форм Гадолин поднялся до теории внутреннего строения кристаллических средин — того внутреннего строения, которое проявляется нам в правильностях физических

---

[1] В. И. Вернадский. Памяти Н. И. Кокшарова и А. В. Гадолина. Bull. Soc. nat. Moscou, т. 6, № 4, 1892, стр. 506.

свойств. Дальше итти теперь нельзя; будущему, при новом материале опытном, предстоит оживить эту систему неподвижных строений и дать нам в конце концов механическую теорию твердого тела.

„Работы Кокшарова дали точный фундамент для всех обобщений геометрического строения природных тел. Точность наблюдения этих свойств не была до сих пор превзойдена; работы Гадолина дали нам самое полное обобщение этих наблюдаемых фактов, дальше которого при имеющемся материале нельзя итти. В общем развитии кристаллографии их имена останутся навсегда памятными, так как в сущности оба шли разными путями к одной цели — к выработке незыблемых объективных оснований той отрасли физических наук, к которой влекла их мысль, и на этом пути они были в свое время в числе первых среди ученых всего мира“.

Однако выводы Гадолина большинству минералогов и кристаллографов того времени казались непонятными или неверными. Они предпочитали оставаться на своих старых позициях. Вот что писал по этому вопросу Е. С. Федоров[1] в некрологе, посвященном памяти А. В. Гадолина: „Громадное большинство ученых оставалось еще глухим к провозглашению новых истин и новых путей исследования; ученые еще не считали нужным сообразоваться с результатами строго геометрического анализа и предполагали излагать кристаллографию по более или менее произвольным внушениям. Науман до конца жизни продолжал настаивать на своих ошибочных взглядах, находившихся в прямом противоречии с выводами Гадолина. Долго еще взгляды Наумана были господствующими в Германии, особенно благодаря популярности его руководства «Основания минералогии», распространившегося в Германии и за ее пределами в целом ряде изданий“.

---

[1] Е. С. Федоров. Некролог и список сочинений А. В. Гадолина. Изв. Геол. ком., 1893, стр. 1.

С течением времени, однако, правота высказываний А. В. Гадолина начинает находить все больше приверженцев. Один за другим появляются новые выводы видов симметрии.

Остановимся вкратце на главных из них.

1883 г. Е. С. Федоров представил в Минералогическое общество свой первый капитальный труд „Начала учения о фигурах". В нем, независимо от Гесселя, забытые сочинения которого в то время еще не были заново открыты, дается полный вывод видов симметрии для всех без исключения конечных фигур. (Начала учения о фигурах, Отдел III. Учение о симметрии). При этом Федоров идет совершенно оригинальным путем. Он выводит все возможные системы осей из рассмотрения выведенных им же подтипических изогонов (изогон — многогранник, все многогранные углы которого равны или симметричны. Изогоны являются подтипическими многогранниками по отношению к изоэдрам — многогранникам, все грани которых равны между собой или симметричны. Подтипическим же многогранником называется такой, вершины которого являются точками касания типического).

Позже, в 1889 г. Федоров снова вернулся к этому вопросу, выразив в статье „Симметрия конечных фигур" виды симметрии посредством специальных алгебраических выражений. Из иностранных ученых в конце прошлого века этим вопросам посвятили свои исследования Кюри, Миннигероде и др.

В 1884 г. П. Кюри,[1] обратив внимание на отсутствие у Браве сложной симметрии, выдвинул понятие о зеркально-поворотной оси под названием „периодически действующей плоскости симметрии" (plan de simétrie alterne) и дал новый вывод совокупностей элементов симметрии для конечных фигур.

В 1887 г. Б. Миннигероде[2] дает новый вывод тридцати двух кристаллографических видов симметрии, основываясь на математической теории групп.

---

[1] См.: Bull. Soc. min. de France, т. 7, 1884, стр. 89 и 418.

[2] См.: Neues Jahrb. f. Min., Geol. u. Paleont., Beil. Bd., 1887, стр. 145; Zeitschr. f. Krist., т. 15, 1889, стр. 517.

Отстаивая приоритет в этом отношении русской науки, Е. С. Федоров писал:[1] „В 1887 г. в лице Миннигероде систему Гадолина приняла и немецкая наука. Запоздание в движении заграничной науки в этой области сравнительно с русской наукой произошло, следовательно, не менее, чем на 20 лет“.

Следуя Миннигероде, А. Шенфлис в своей известной книге „Кристаллографические системы и структура кристаллов“ (1891) также рассматривает виды симметрии как конечные группы. В первоначальном варианте этой книги он даже назвал тридцать два вида симметрии „группами Миннигероде“, что вызвало горячий протест со стороны Е. С. Федорова. Вот что писал он по этому поводу 21 октября 1890 г. Шенфлису:

„Извините меня, если я вам прямо замечу, что называть 32 вида симметрии группами Миннигероде совершенно неправильно и остро несправедливо по отношению к ученому, который более 20 лет тому назад вывел эти системы с такой педантической математической точностью, что вывод этот, как теперь, так, по всей вероятности, и столетием позже, продержится в такой же полной неприкосновенности, как и в 1867 г. при его первом открытии. Само собой разумеется, что я имею в виду Гадолина. Эти системы можно было бы называть системами Гадолина...

„Само собой понятно, что компетентный русский, француз или вообще не немец сочтет невозможным принять наименование упомянутых систем, как групп Миннигероде.

„Что касается до меня самого, то я считаю это наименование тем более нарушающим истину и справедливость, что у Кюри так же, как и в моих «Началах учения о фигурах» (которые, как я сообщал уже в предыдущем письме, были сданы в печать раньше, чем работа Кюри), появились некоторые новые точки зрения, а как раз в работе Миннигероде нет ничего нового“.

---

[1] Е. С. Федоров. Заметка об успехах теоретической кристаллографии за последнее десятилетие. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXVI, стр. 348, 1890.

Наконец, в 1891 г. выходит „Краткое руководство по кристаллографии“ Е. С. Федорова, где впервые вывод совокупностей элементов симметрии конечных фигур дается в популярном изложении для студентов.

Годом позже, в 1892 г., П. Грот издает на немецком языке „Обзорные таблицы тридцати двух подразделений кристаллографических форм с пояснительными примерами и графическими изображениями по Гадолину“. „А. В. Гадолин находился уже на смертном одре, — писал Е. С. Федоров, — когда появилось последнее сочинение, и пережил его всего на несколько недель. Судьбе было угодно, чтобы он дожил до момента справедливости, до того момента, когда его имя стало раздаваться в аудиториях, разноситься по разным концам не только России, но и Германии, с тем, чтобы никогда больше не быть забытым“.[1]

Дальнейшим шагом в развитии учения о симметрии конечных фигур, как мы уже отмечали, явилась опубликованная в 1897 г. работа Г. В. Вульфа (1863—1925),[2] содержащая новый оригинальный вывод тридцати двух видов симметрии. В основу этого вывода была положена попытка ввести единое начало в учение о симметрии. (Как известно, в понятии о симметрии имеется двойственность, связанная с операциями двух родов — операциями замещения и операциями, заключающими в себе отражения). С предельной простотой Г. В. Вульф показывает, что симметрия конечных пространственных фигур может быть сведена к отражениям в одной или нескольких зеркальных плоскостях, действующих порознь, попарно и по три.

Таким образом, плоскость симметрии является основным элементом симметрии. Исходя из комбинаций зеркальных плоскостей, Вульф дал весьма наглядный вывод тридцати двух кристаллографических видов симметрии.

---

[1] Е. С. Федоров. А. В. Гадолин. Некролог. Зап. Мин. общ., ч. XXX, 1893, стр. 410.

[2] Г. В. Вульф. Симметрия и вывод всех ее кристаллографических видов. Варш. унив., изв., т. 7, 1897, стр. 2—30.

Следующий шаг в развитии учения о видах симметрии кристаллов представляет работа А. К. Болдырева (1883—1946) „Основы геометрического учения о симметрии“ (1907).[1] Автор „Основ“ в своем труде исходит из понятия „равных“ фигур, сформулированного в свое время математиком Мебиусом. Согласно Мебиусу: „Две фигуры называются равными в том случае, если расстояние между двумя любыми точками одной фигуры равно расстоянию между соответственными точками другой“. Отметим, что такое определение обнимает как совместимо-равные, так и отраженно-равные фигуры. (В отличие от Мебиуса, А. К. Болдырев называет вышеупомянутые равные фигуры „взаимно-симметричными“. Впоследствии С. А. Богомолов и вслед за ним В. В. Доливо-Добровольский снова вернулись к терминологии Мебиуса). Исходя из понятия равных фигур и рассматривая все без исключения пространственные фигуры (как конечные, так и бесконечные), Болдырев обобщает и расширяет выводы Вульфа. В этом отношении особенно важную роль играет следующая его теорема: „Любые две взаимно-симметричные (т. е. равные) системы можно вывести друг из друга посредством последовательного отражения либо в трех, либо в четырех плоскостях“. Приведенная теорема позволяет путем комбинирования отражений вывести до конца все возможные элементы симметрии для всех без исключения трехмерных фигур как конечных, так и бесконечных. (В случае конечных фигур, как показал Вульф, максимальное число отражений соответствует трем).

Выводы Болдырева в общедоступной форме были подробно изложены профессором Ленинградского горного института В. В. Доливо-Добровольским (1904—1936) в его „Курсе кристаллографии“ (1937). Надо полагать, что учение о симметрии кристаллов достигло в упомянутых трудах предельной простоты и наглядности.

---

[1] **А. К. Болдырев. Основы геометрического учения о симметрии. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XL, вып. 1, 1907.**

На этом мы заканчиваем наш краткий обзор истории вывода тридцати двух видов симметрии кристаллов.

В настоящее время советские ученые Н. В. Белов, А. В. Шубников, В. И. Михеев и другие вводят ряд новых понятий и представлений в учение о симметрии кристаллов. Рассмотрение трудов этих ученых выходит за рамки нашего обзора, специально посвященного истории вывода тридцати двух видов симметрии кристаллов.

И. И. Шафрановский,
В. А. Франк-Каменецкий.

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] (стр. 9). С сообщением о своем выводе А. В. Гадолин выступил на заседании Петербургского минералогического общества 19 марта 1867 г. Впервые работа была опубликована в „Записках С.-Петербургского минералогического общества“ (2-я серия, ч. IV, 1867, стр. 112—200). Отдельные оттиски вышли в 1868 г. Французский перевод см.: Acta Soc. Sci. Fenn., т. IX, 1871. Немецкий перевод был издан отдельной книжкой в серии „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften“ (№ 75, 1897).

[2] (стр. 9). Автор имеет в виду закон Стено—Ломоносова—Ромэ-Делиля, который в настоящее время формулируется следующим образом: *Во всех кристаллах одного и того же вещества одного и того же строения, при одинаковых условиях, углы между соответственными гранями (и ребрами) постоянны.* Этот важнейший геометрический закон кристаллографии дал возможность применять при изучении кристаллов законы геометрии. Впервые в 1615 г. (?) астроном Кеплер наблюдал постоянство углов на снежинках. В 1669 г. в очень несовершенной форме этот закон установил датский ученый Н. Стено на кристаллах горного хрусталя (SiO_2) и железного блеска (Fe_2O_3).

Великий русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765), независимо от Стено, твердо установил этот закон путем измерения кристаллов селитры (KNO_3) и алмаза, причем впервые связал закон постоянства углов со строением кристаллов. Взгляд Ломоносова на структуру кристаллов во многом отвечает современным представлениям об их строении. Через 30 лет после Ломоносова французский ученый Ромэ-Делиль подтвердил закон путем измерений кристаллов многочисленных веществ.

[3] (стр. 9). Имеется в виду закон Р.-Ж. Аюи (1743—1826), или закон целых чисел, который А. В. Гадолин излагает в Приложении А (стр. 91). Формулируется он в настоящее время следующим образом: *Двойные отношения отрезков (параметров), отсекаемых двумя любыми гранями на кристаллографических осях, равняются отношениям целых неболь-*

ших чисел. Закон целых чисел имеет силу только в том случае, если за кристаллографические оси (координатные оси, проведенные в кристалле) приняты направления, совпадающие или параллельные рядам пространственной решетки кристалла. В кристаллических многогранниках такими направлениями являются ребра кристалла (наблюдаемые или возможные), оси симметрии, перпендикуляры к плоскостям симметрии и некоторые другие направления.

[4] (стр. 9). Группы и формы голоэдрические, гемиэдрические, тетартоэдрические и гемиморфные — термины, почти вышедшие из употребления. Они отвечают определенным видам симметрии в каждой сингонии (системе).

[5] (стр. 10). В настоящее время это положение формулируется точнее: по симметричным направлениям физические свойства кристаллов одинаковы.

[6] (стр. 10). Симметрично-равными называются такие направления в кристалле, которые совмещаются при помощи операций симметрии.

[7] (стр. 13). В оригинале на фиг. 1 ошибочно не нанесена прямая *Cb*.

[8] (стр. 15). Наименьший угол, на который необходимо повернуть фигуру около оси симметрии („оси совмещения", по Гадолину), чтобы произвести совмещение, называется *элементарным углом поворота* (α) данной оси.

[9] (стр. 15). Наименование, или порядок, оси симметрии определяют по числу совмещений фигуры при повороте вокруг оси на 360°. Если элементарный угол данной оси α, то ее порядок (n), очевидно, $n = \frac{360^\circ}{\alpha}$. Таким образом, при элементарном угле в 180° мы имеем дело с осью *второго порядка*, или *двойной осью* симметрии (дигирой), при элементарном угле в 120° — с *тройной осью* (тригирой), при угле в 90° — с *четверной осью* (тетрагирой) и при угле в 60° — с *шестерной осью* (гексагирой).

[10] (стр. 17). Здесь А. В. Гадолин формулирует так называемый *закон симметрии кристаллов*, лежащий в основе вывода тридцати двух видов симметрии и двухсот тридцати пространственных групп: *В кристаллах возможны только двойные, тройные, четверные и шестерные оси симметрии*.

[11] (стр. 22). Почему направления, параллельные выведенным здесь А. В. Гадолиным шести двойным осям симметрии, он называет „ромбическими осями" — непонятно. Быть может, это связано с тем, что грани, перпендикулярные двойным осям, имеют форму ромбов. Они образуют простую форму, называемую ромбо-додекаэдром.

[12] (стр. 23). Тригональная ось — тройная ось симметрии (тригира; см. прим. 9).

[13] (стр. 28). В данной главе Гадолин рассматривает так называемые *инверсионные* оси симметрии (гироиды). При наличии такой оси фигура совмещается при повороте на некоторый определенный угол и при отражении всех ее точек в центральной точке как в центре инверсии. Порядок инверсионной оси зависит, как и при простой оси симметрии, от величины элементарного угла поворота.

Часто при описании симметрии кристаллов и выводе тридцати двух видов симметрии пользуются не инверсионными осями, а так называемыми „сложными", или „зеркально-поворотными", осями. Под воздействием такого рода осей фигура совмещается при повороте вокруг оси на некоторый определенный угол (α) и отражении в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Инверсионные оси симметрии, которыми пользовался в данном сочинении А. В. Гадолин, имеют некоторые преимущества перед зеркально-поворотными осями. Ими лучше выражаются геометрические (а следовательно, и физические) свойства кристаллов. При пользовании инверсионными осями более просто и четко группируются виды симметрии и пространственные группы по сингониям, чего не достигается при пользовании зеркально-поворотными осями. Большим преимуществом первых является также и то, что теоремы о сложении элементов симметрии для инверсионных осей те же, что и для простых осей симметрии (например теорема Эйлера).

[14] (стр. 29). Этот закон совмещения называется ныне совмещением фигуры при помощи *центра инверсии* (иногда называемого центром симметрии). Центр инверсии можно рассматривать как инверсионную ось первого порядка (у Гадолина это обозначается равенством $\alpha = 0$).

[15] (стр. 31). Ныне говорят: инверсионная ось второго порядка ($\alpha = 180°$) равнозначна плоскости симметрии.

[16] (стр. 31). Соответствующую ось симметрии в настоящее время называют инверсионной осью четвертого порядка ($\alpha = 90°$) или четверной инверсионной осью.

[17] (стр. 32). В данном разделе (4) говорится об инверсионной оси симметрии шестого порядка ($\alpha = 60°$) и о том, что эта ось равнозначна совокупности простой тройной оси и перпендикулярной ей плоскости симметрии.

[18] (стр. 32). Здесь говорится об инверсионной оси симметрии третьего порядка и о том, что она равнозначна совокупности простой оси третьего порядка (совпадающей с инверсионной осью) и центра инверсии.

[19] (стр. 34). Здесь доказывается одна из теорем о сложении элементов симметрии, которая теперь формулируется обычно следующим образом: равнодействующей оси симметрии четного порядка и центра инверсии является плоскость симметрии, перпендикулярная оси и про-

ходящая через центр инверсии. Остальные теоремы настоящего параграфа понятны без пояснений.

[20] (стр. 36). В данном параграфе, как и в § 16, более сложные виды симметрии кристаллов выводятся автором путем прибавления плоскостей симметрии к совокупностям элементов симметрии так называемых „примитивных“ и „осевых“ видов, характеризующихся наличием только осей симметрии. Плоскости симметрии в § 17 проводятся через оси таким образом, чтобы не появились как равнодействующие другие оси симметрии и центр инверсии. Вывод таких („плоскостных“) видов симметрии у А. В. Гадолина не совсем строгий. Можно обойтись при выводе без „воображаемых“ двойных осей.

[21] (стр. 37). Данный вид симметрии (фиг. 31) получается из соответствующего примитивного (фиг. 29) путем проведения плоскости симметрии через тройную ось и последующего сложения элементов симметрии. Двойные оси симметрии превращаются при этом в четверные инверсионные оси (на рис. 31 вместо овалов оригинала, изображающих двойные оси, следует изобразить овалы, обведенные квадратами).

[22] (стр. 37). Данный вид симметрии (фиг. 37) получается путем проведения плоскости симметрии через четверную ось соответствующего примитивного вида (фиг. 35) и построением возникающих при этом равнодействующих элементов симметрии.

[23] (стр. 37). Здесь мы имеем дело с проведением плоскости симметрии через четверную инверсионную ось (по А. В. Гадолину, „сфеноидальная симметрия“, стр. 31; фиг. 34). Построением возникающих при этом равнодействующих элементов симметрии найдем из совокупности элементов, изображенных на фиг. 34, совокупность, изображенную на фиг. 40. (На фиг. 34 и 40 четверную инверсионную ось следует изображать в виде квадрата со вписанным эллипсом. В оригинале она изображена подобно двойной оси просто в виде эллипса).

[24] (стр. 38). Данная теорема формулируется так: равнодейструющей двойной оси и проходящей через нее плоскости симметрии будет другая плоскость, проходящая через ту же ось.

[25] (стр. 39). Проще и более последовательно этот вид симметрии можно вывести из вида симметрии § 17, пункт 8 (фиг. 54, прим. 27), проведя плоскость симметрии через шестерную инверсионную ось и построив возникающие при этом равнодействующие элементы симметрии.

[26] (стр. 39). И здесь нет необходимости, как и в других случаях, прибегать к воображаемым двойным осям симметрии; можно прямо перейти от фиг. 50 к фиг. 52.

[27] (стр. 39). Удобнее этот случай рассматривать как самостоятельную шестерную инверсионную ось, равноценную простой тройной оси и перпендикулярной к ней плоскости. (На фиг. 54 треугольник оригинала,

изображающий тройную ось симметрии, следует заменить шестиугольником и вписанным в него треугольником, как теперь изображаются шестерные инверсионные оси).

[28] (стр. 40). Данный вид симметрии получается как результат построения равнодействующих элементов симметрии от тройной оси и проходящей через нее плоскости симметрии.

[29] (стр. 42). Ныне чаще называется *кубической*, *гексаэдрической*, *полигирной* или, ввиду обязательного наличия четырех тройных осей симметрии, *тетратригирной* системой, или сингонией.

[30] (стр. 42). Чаще называется в настоящее время *тетрагональной*, или *тетрагирной*, системой, или сингонией.

[31] (стр. 42). Ромбическую систему, или сингонию, можно называть *тридигирной*, ввиду наличия трех простых или простых и инверсионных двойных осей симметрии.

[32] (стр. 42). Моноклиноэдрическую систему, или сингонию, чаще теперь называют *моноклинной*. Можно называть ее *монодигирной*, по наличию одной простой или инверсионной двойной оси симметрии.

[33] (стр. 42). Эта система, или сингония, называется теперь *триклинной*. Удобно называть ее *моногирной*, в связи с наличием простых или инверсионных осей симметрии только первого порядка.

[34] (стр 42). Гексагональная, или гексагирная, система, или сингония, делится в настоящее время на две системы, или сингонии:

1) *гексагональную*, или *гексагирную*, которая содержит виды симметрии с одной шестерной осью симметрии — простой или инверсионной (фиг. 44, 45, 49, 50—52, 54);

2) *тригональную*, *тригирную*, или *ромбоэдрическую*, систему, или сингонию, которая содержит виды симметрии с одной тройной простой или инверсионной осью симметрии (фиг. 47, 48, 53, 55, 56).

[35] (стр. 43). Чаще всего виды симметрии кристаллов (классы) называют по отвечающей им *общей форме*, т. е. такой, грани которой расположены косо по отношению к элементам симметрии и неодинаково наклонены к однотипным элементам симметрии. Голоэдрический, или полногранный, вид симметрии кубической сингонии должен быть назван при этом *гексоктаэдрическим*, так как отвечающая ему общая форма — сорокавосьмигранник, или гексоктаэдр.

[36] (стр. 43). Гемиэдрическая (половинogранная) форма называется *пентагон-три-октаэдром*.

[37] (стр. 43). Тоже гемиэдрическая (половинogранная) форма; называется, в отличие от предыдущей, *тетраэдрической*, так как в этом виде симметрии присутствует как частная форма тетраэдр. Современное название формы — *гексатетраэдр*.

[38] (стр. 44). В этом виде симметрии может быть частная форма —

пентагон-додекаэдр, почему гемиэдрия и называется додекаэдрической. Общая форма ныне называется *дидодекаэдром*.

39 (стр. 44). Тетартоэдрическая (четвертьгранная) форма, т. е. сравнительно с полногранной — сорокавосьмигранником. Эта общая форма имеет всего двенадцать граней. Современное название формы — *пентагон-тритетраэдр*.

40 (стр. 44). Форма в настоящее время называется *дитетрагональной дипирамидой*.

41 (стр. 45). Название сохранилось до настоящего времени.

42 (стр. 45). Гемиэдрия называется сфеноидальной, ввиду наличия четверной инверсионной оси, которую раньше называли сфеноидальной осью.

43 (стр. 45). Подразумевается двойная пирамида, так как грани пересекаются с обоих концов четверной оси. Поэтому в настоящее время общая форма называется *тетрагональной дипирамидой*.

44 (стр. 45). Называется ныне *тетрагональным тетраэдром*.

45 (стр. 46). Гемиморфными называются формы, представляющие собой как бы половину дипирамидальных, иначе говоря, формы пирамидальные, в которых грани пересекают какую-либо ось не с двух, а только с одного конца. Данное ниже название общей формы *дитетрагональная пирамида* сохранилась до сих пор.

46 (стр. 46). Понятнее название, данное при фиг. 35. Форма называется гемиморфной, так как она пирамидальная, а не дипирамидальная; гемиэдрической, так как число граней в форме вдвое меньше, чем у предыдущей дитетрагональной пирамиды. Общая форма называется теперь *тетрагональной пирамидой* чаще, чем квадратной.

47 (стр. 46). В настоящее время известны представители всех тридцати двух видов симметрии, выведенных А. В. Гадолиным. Вместе с тем не найдены кристаллы, которые по симметрии выходили бы за пределы указанных тридцати двух видов симметрии.

48 (стр. 48). Данная форма ныне называется *дигексагональной дипирамидой*.

49 (стр. 49). Название формы сохранилось до сих пор.

50 (стр. 49). Ввиду наличия тройной инверсионной оси симметрии данный вид симметрии причисляется в настоящее время не к гексагональной, а к тригональной сингонии. Гемиэдрия называется ромбоэдрической потому, что здесь в виде частной формы присутствует ромбоэдр. Общая форма обычно называется теперь *тригональным* или *дитригональным скаленоэдром*.

51 (стр. 49). В настоящее время данная форма называется *гексагональной дипирамидой*. Принадлежность дипирамиды, пирамиды и призмы к формам первого, второго или третьего рода зависит от положения гра-

ней этих форм относительно кристаллографических осей. Формы третьего рода имеют грани, которые неодинаково наклонены к кристаллографическим осям, как это видно, например, на проекции (фиг. 51).

52 (стр. 49). Форма называется теперь *дитригональной дипирамидой*.

53 (стр. 50). Форма ныне относится не к гексагональной, а к тригональной сингонии, так как содержит тройную инверсионную ось, равнозначную по действию тройной простой оси и центру инверсии.

54 (стр. 50). Принадлежит также к тригональной сингонии.

55 (стр. 50) Форма называется в настоящее время *тригональной дипирамидой*.

56 (стр. 52). Форма называется ныне просто *дигексагональной пирамидой* (без слова „половина", как у автора).

57 (стр. 52). Аналогично с предыдущей форма называется просто *гексагональной пирамидой*.

58 (стр. 52). Данный вид симметрии относится ныне к тригональной (ромбоэдрической) сингонии. Общая форма называется *дитригональной пирамидой*.

59 (стр. 53). Вид симметрии также причисляется в настоящее время к тригональной сингонии. Общая форма называется *тригональной пирамидой*.

60 (стр. 53). В настоящее время называется *ромбической дипирамидой*.

61 (стр. 53). Форма называется теперь *ромбическим тетраэдром*.

62 (стр. 53). Ныне называется *ромбической пирамидой*.

63 (стр. 56). Здесь мы имеем дело с призмой, имеющей ромбическое сечение, поэтому данная форма моноклинной сингонии называется ныне *ромбической призмой*.

64 (стр. 56). Данная форма, состоящая из двух пересекающихся граней, называется в настоящее время *диэдром* (плоскостным).

65 (стр. 56). Форма также называется ныне *диэдром* (осевым).

66 (стр. 57). Перевод: „Достаточно наличия той или иной из этих пар граней для того, чтобы имела место гемиэдрия без наложения".

67 (стр. 57). Форма, состоящая из двух параллельных граней, называется *пинакоидом*.

68 (стр. 57). Форма, состоящая из одной грани, называется ныне *моноэдром*.

69 (стр. 61). Кристаллографическими осями называются координатные оси, проведенные в кристалле параллельно рядам пространственной решетки. В кристаллических многогранниках этим направлениям отвечают наблюдаемые или возможные ребра кристалла, а также оси симметрии, перпендикуляры к плоскостям симметрии и некоторые другие направления. Выбор кристаллографических осей производится по определенным,

для каждой сингонии отличным правилам. При выборе кристаллографических осей вводятся некоторые условности, которые в известной степени сохраняют свое значение и в том случае, когда известно строение кристалла. Они необходимы для того, чтобы достичь однозначности в выборе координатных осей. В кристаллах триклинных и моноклинных эта однозначность может быть достигнута только после выявления характера и размеров элементарной ячейки при помощи рентгеноструктурного анализа.

[70] (стр. 62). Е. С. Федоровым было доказано, что не только двойные, четверные и шестерные оси симметрии, но и тройные оси являются рядами кристаллической решетки и, следовательно, возможными кристаллографическими осями. При доказательстве того, что оси симметрии и перпендикуляры к плоскостям симметрии могут выбираться в качестве кристаллографических осей, в настоящее время исходят из представления о решетчатом строении кристаллов. Ниже А. В. Гадолин пользуется для этих целей одним из следствий решетчатого строения кристаллов, а именно — законом рациональных отношений параметров.

[71] (стр. 66). Можно доказать, что плоскость, перпендикулярная не только к двойной, четверной и шестерной, но также и к тройной оси симметрии, есть возможная грань кристалла.

[72] (стр. 73). Как указано в прим. 70, Е. С. Федоров, исходя непосредственно из теории строения кристаллов, доказал, что тройные оси симметрии являются рядами пространственной решетки (или направлениями, параллельными рядам), а следовательно, являются возможными кристаллографическими осями. Поэтому данное предположение („ρ не есть куб рационального числа“) невозможно.

[73] (стр. 74). Как указано в прим. 21, указанные оси являются четверными инверсионными осями симметрии.

[74] (стр. 74). См. прим. 72.

[75] (стр. 75). Одна из осей (вертикальная) является четверной инверсионной осью симметрии.

[76] (стр. 77). См. прим. 72.

[77] (стр. 77). Тройные оси симметрии всегда являются возможными рядами пространственной решетки, возможными ребрами и кристаллографическими осями (см. прим. 70 и 72). Следовательно, в данных видах симметрии всегда возможны призмы, грани которых параллельны тройной оси, и моноэдры (не пинакоиды), грани которых перпендикулярны данной оси.

[78] (стр. 78). Равномерность возможна только в пределах ошибки измерения; теоретически она невозможна.

[79] (стр. 78). Прямой угол также теоретически невозможен.

[80] (стр. 78). Все три указанных случая теоретически невозможны. Они возможны лишь в пределах ошибки измерения.

81 (стр. 79). Как указано в прим. 70, 72 и 77, тройные оси симметрии не представляют исключения в указанном здесь отношении, поэтому все дальнейшее в данном параграфе теряет свое значение.

82 (стр. 82). Необходимо помнить, что дипирамиды всюду у автора названы пирамидами, пирамиды — полупирамидами, моноэдры — полупинакоидами.

83 (стр. 91). В Приложении А излагается закон Р.-Ж. Аюи (1743—1826), или закон целых чисел (закон рациональности двойных отношений, закон рациональности отношений параметров и пр.). Его современную формулировку см. в прим. 3. При доказательстве рациональности отношений исходят из представления о кристалле как пространственной решетке. При доказательстве того, что двойные отношения равны не только целым, но и небольшим числам, используется закон Браве (кристалл покрывается гранями с большой ретикулярной плотностью).

84 (стр. 99). Описываемые здесь А. В. Гадолиным стереографические проекции употребляются и в настоящее время. Оси симметрии (и вообще прямые) и плоскости симметрии изображаются посредством *собственно стереографических* проекций (граммастереографических проекций), грани же — посредством стереографических проекций перпендикуляров к ним; эти проекции называются *гномостереографическими* проекциями (по-гречески г н о м о н — перпендикуляр).



БИБЛИОГРАФИЯ

Список научных трудов А. В. Гадолина

1. Beobachtungen über einige Mineralien aus Pitkäranta. Зап. Мин. общ., 1855—1856.

2. Geognostische Beschreibung der Insel Pusu im Ladoga-See. Geognostische Skizze der Umbebungen von Kronoborg und Tervus. Там же, 1857, стр. 56.

3. Eine einfache Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der Mineralien. Там же, 1857, стр. 56.

4. О сопротивлении стен орудия давлению пороховых газов. Арт. журн., № 2, 1858.

5. Zur Bestimmung des speczifischen Gewichtes der Mineralien. Pogg. Ann., т. 106, 1859.

6. Теория орудий, скрепленных кольцами. Арт. журн., 1861; Rev. de Technologie militaire par Terssen, т. III, 1863.

7. Определение сопротивления сдвигу некоторых металлических сплавов (1857). Справочная книжка артиллерийского офицера. СПб., 1863.

8. Mémoire sur la résistance des parois des canons à la pression des gaz de la poudre, suivi de la théorie des canons serclés. Paris, 1863.

9. Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. IV, 1867, стр. 112—200.

10. О новых усовершенствованиях по литью чугунных орудий в Америке. Арт. журн., 1861. Перевод на англ. язык напечатан в: Practical mechanics journal, т. III, 1867—1868.

11. О сопротивлении орудий открыванию казенной части при употреблении для запирания казны механизмов Трель-де-Болье. Арт. журн., 1869.

12. Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systémes cristallographiques. Acta Soc. Sci. Fenn., т. IX, 1871.

13. О переменах скоростей вращения шпинделей в токарных и сверлильных станках. Зап. Русск. техн. общ. и свод привилегий, выдаваемых по Департаменту торговли и мануфактур, 10-й год, вып. 4, 1876, стр. 285—294.

14. Теория устройства перемены скоростей рабочего движения на токарных и сверлильных станках. Изв. СПб. практического технологического института, стр. 129—148 и прилож. табл. I и II, 1877, стр. 149—159.

15. Присуждение в 1884 г. Ломоносовской премии за ученые исследования и открытия, сделанные в России в области физики, химии и минералогии. Отзывы о сочинениях Н. П. Петрова: „Трение в машинах“, „О трении хорошо смазанных твердых тел“ и „Внешнее трение“, представленных на XIX соискание Ломоносовских премий (1884). Зап. Акад. Наук, т. L, кн. I, 1885, IV + 145 стр. (отд. отт.).

16. О законе изменяемости ветра. Зап. Акад. Наук, т. LXII, № 4, 1890 (с 12 рис.); то же, на немецком языке: Ueber das Gesetz der Veränderlichkeit der Winde. Mem., VII sér., т. XXXVII, № 10, 1890.

17. Отчет о поездке на Уральские горные заводы в течение лета 1891 г. (С Г. Якимовичем; в Библ. Арт. акад.).

Литографированные курсы, читанные А. В. Гадолиным

1. Курс о теплороде, 1853—1858.
2. Курс о механической теории теплорода.
3. Курс о горючих материалах и печах. 1862.
4. Курс технологии дерева. 1863.
5. Курс о приготовлении пороха. 1864.
6. Курс кристаллографии. 1873.
7. Курс о станках для обработки металлов. 1874.
8. Чугуннолитейное производство. 1875.
9. Определение величины продольных усилий в шрапнелях. 1888.
10. Курс артиллерийской технологии. Две части с атласом.

Литература о А. В. Гадолине

1. Е. С. Федоров. Несколько слов по поводу замечательного труда А. В. Гадолина „Вывод всех кристаллографических систем из одного начала“. Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXIII, 1887, стр. 353—356.

2. В. И. Вернадский. Памяти Н. И. Кокшарова и А. В. Гадолина. Bull. Soc. nat. Moscou, т. 6, № 4, 1892, стр. 506—510.

3. А. В. Гадолин (некролог). Арт. журн., 1893, № 12.

4. Е. С. Федоров. А. В. Гадолин. Горн. журн., IV, 1892; стр. 558—563; Зап. Мин. общ., 2-я серия, ч. XXX, 1893, стр. 405—412.

5. Е. С. Федоров. Некролог и список сочинений А. В. Гадолина. Изв. Геол. ком., 1893, стр. 1—6.

6. Г. Гродский. Михайловское артиллерийское училище и Академия в XIX столетии. Ч. I. СПб., 1905.

7. П. М. Никифоров. Гадолин А. В. Материалы для биографического словаря действительных членов Академии Наук. Ч. I, т. III, 1915, стр. 187—193.

8. А. Попов. Артиллерийская ордена Ленина Академия Красной Армии им. Ф. Э. Дзержинского. М., 1940.

9. Г. Б. Бокий и И. И. Шафрановский. Русские кристаллографы. Тр. Инст. ист. естествознания, т. I, 1947, стр. 81—120.

10. С. В. Шухардин. А. В. Гадолин. Сб. „Люди русской науки“, т. II, 1948, стр. 923—930.

11. Н. С. Ачеркан. Закон Гадолина — основной закон теории привода станков. Сб. „Исследования в области металлорежущих станков“, Машгиз, 1952, стр. 3—5.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала

Введение 9
Глава I. О равенстве направлений 11
Глава II. Об осях совмещения 13
Глава III. О законах симметрии 28
Глава IV. Обзор кристаллографических групп 42
Глава V. О расположении и равенстве кристаллографических осей 61
Глава VI. Описание некоторых кристаллографических групп . . 81
Глава VII. Заключение 85
Приложение А 91
Приложение Б 96
Объяснение чертежей 99
Обзор содержания 102

Приложения

Послесловие 109
История вывода тридцати двух видов симметрии кристаллов. *И. И. Шафрановский* и *В. А. Франк-Каменецкий* 112
Примечания. *О. М. Аншелес* 144
Библиография:
Список научных трудов А. В. Гадолина 153
Литографированные курсы, читанные А. В. Гадолиным . . . 154
Литература о А. В. Гадолине 154

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *Л. С. Сазонов*
Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректоры *А. С. Малютина* и
К. С. Тверитинова

*

РИСО АН СССР № 5346. Пл. № 4—63В.
Подписано к печати 17/II 1954 г. М-17662.
Бумага 70×92 $^{1}/_{16}$. Бум. л. $4^{15}/_{16}$. Печ. л. 11.55.
Уч.-изд. 7.72 + 4 вклейки (0.51 уч.-изд. л.).
Тираж 4000. Зак. № 968.
Номинал по прейскуранту 1952 г. 8 р. 05 к.

1-я тип. Изд. Академии Наук СССР. Ленинград,
В. О., 9-я линия, дом 12.


КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИЕ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯ
А.В. ГАДОЛИН

3 р. 05 к.